Kostadin Trençevski
Aneta Gatsovska
Naditsa İvanovska
Yovanka Trençeva Smileski

İKTİSATÇILAR İÇİN MATEMATİK

DÖRT YILLIK
MESLEKİ OKULLARA AİT
SINIF IV

İKTİSAT - HUKUK MESLEĞİ
EKONOMİ TEKNİSYENİ

Denetleyenler:
Dr. Bilyana Kırsteska, UKİM, PMF öğretim görevlisi, Üsküp- başkan,
Lidiya Kuzmanovska, profesör - ÜBOO,,Lazar Tanev", Üsküp, üye ve
Lyubitsa Dimitrova, profesör - SOU,,Gyoşo Vikentiev", Koçana, üye

Yayıncı:
Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı

Basımevi:
Grafiçki Centar Ltd., Üsküp

Tiraz:
50

Makedonya Cumhuriyeti Eğitim Bakanlığı Nr. 22-5470/1 ve 7.12.2010 tarihli kararıyla işbu kitabın kullanılmasına izin verilmiştir.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св.Климент Охридски", Скопје
512. 1 (075.3)
МАТЕМАТИКА за економисти за IV година на четиригодишното стручно образование: економско-правна струка економски техничар / Костадин Тренчевски... [и др.]. - Скопје: Министерство за образование и наука на Република Македонија, 2011, - 168 стр.: граф. прикази; 29 см
Автори: Костадин Тренчевски, Анета Гацовска, Надица Иванова, Јованка Тренчева Смилески
ISBN 978-608-226-177-5
1. Тренчевски, Костадин [автор]
COBISS.MK-ID 86468618

Ö n s ö z

İKTİSATÇILAR İÇİN MATEMATİK kitabı, dört yıllık mesleki eğitimin dördüncü sınıfına ait zorunlu ders olarak matematik dersinin plan ve programı üzere hazırlanmıştır. İktisat hukuku ve ticaret mesleki dersi plan ve programına göre eğitim gören öğrenciler için öngörülmüştür. Amaç, okuyucuyu bir yandan iktisatta gerekli bazı matematiksel yöntemlerle tanıştırmak, öte yandan da matematiksel düşünmeye alıştırarak doğrudan matematik kitaplarından yararlanabilir duruma gelmesine yardım etmektir. Kitap, dört bölümden ibarettir. Ele alınan konuları daha iyi ve kolay benimsemek için her bölümün sonunda çeşitli düzeylerde çözülmüş örnekler, alıştırmalar ve çizimler verilmiştir. Her ders biriminin sonunda, ders esnasında ya da evde öğrencilerin kendi başına çalışmaları için alıştırmalar verilmiştir. Kitabın sonunda, alıştırmaların çözümleri, bazılarının ise çözümü için tavsiyeler verilmiştir.

Birinci bölümde "**Diziler**" konusu incelenmiştir. Bu konudaki malzemeyi öğrenmekle, reel sayılı diziler hakkında daha kapsamlı bilgiler edineceksiniz. Burada özellikle aritmetik ve geometrik dizilerine, onların genel terimine ve ilk n-teriminin toplamına ait formüllere daha fazla önem verilmiştir.

"**Bileşik faiz hesabı**" adında verilmiş olan ikinci bölüm,ilerde bunu *i/i* kısaltmasıyla işaretleyeceğiz, öğrencinin basit faiz hesabı hakkında bilgilerini yoklamasına ve bileşik faiz kavramını öğrenmesine olanak sağlamaktadır. Dönem başı (Antisipatif) ve dönem sonu (dekurzif) faizlenme kavramları incelenir ve bununla öğrenci faiz oranını, faiz miktarını ve faiz süresinin nasıl hesaplandığını öğrenecektir.

İkinci bölüm "**Kıymetli metaller paralar ve dövizler**" başlığı altında verilmiştir. Bu konunun içeriğini öğrenmekle, kıymetli metaller hakkında bilgilerin genişletilmesini, onların arılık derecesinin nasıl hesaplandığını ve hesaplama tekniklerini öğrenmeye olanak sağlamaktadır. Bundan başka para ve dövizler hakkında geniş bilgiler verilmiş, özellikle dövizlerin satın ve alımı vurgulanmıştır.

Üçüncü bölümde "**Vadeli yatırımlar ve vadeli gelirler**" kavramı incelenmiştir. Amaç, dönem başı ve dönem sonu yatırımları tanımak ve bu gibi yatırımların sonundaki değerlerini hesaplamaktır. Bu bölümde kira, kira yatırımı, iskonto ve iskonto değeri kavramlarını da öğreneceksiniz. Sonunda, bileşik faiz, yatırımlar ve kira ile ilgili daha bileşik problemler çözebileceksiniz.

Son olan dördüncü bölümde "**Borçlar**" kavramı incelenir, borç, amortizasyon vadesi, taksitler, ödeme gibi kavramlar incelenmiştir. Eşit taksitli borçlar, eşit anüiteli ödemeler, yuvarlak anüiteli ve farklı türden borçlar hakkında amortizasyon planları yapılmaktadır.

Bu kitaptaki ders malzemesini gerçekleştirirken, öğretmen, öğrencilerinden kendi başlarına çalışmalarını teşvik etmelidir.

Bu kitabın kalitesinin iyileşmesi yönünde, denetleyenlerden aldığımız iyi maksatlı eleştiriler için de özellikle minnettarımız.

İlerde de, kitabın içeriğinin zenginleşmesi yönünde iyi maksatlı her eleştiri için önceden teşekkürlerimizi sunarız. Böylece bu kitap, iktisat – hukuk bölümünde öğrenim gören öğrencilere, ilerdeki mesleklerinde yararlı olacak bilgileri öğrenmelerini sağlayacaktır.

Mayıs, 2010 Yazarlar

İÇİNDEKİLER

1. DİZİLER

1.1. Dizi Kavramı

Günlük hayatta, dizi biçiminde sıralamalara çok rastlıyoruz, örnek benzer veya farklı nesnelerin dizisi. Halbuki, matematikte dizilerin özel anlamı vardır. Özellikle sonlu ve sonsuz dizileri birbirinden ayırt etmeliyiz.

Sonlu dizilerde, belli bir düzene göre sıralanmış sonlu sayıda nesneler ve bu durumda, hangisi birinci, hangisi ikinci vb. olduğunu tam olarak belli olan dizilerdir. Bir kümenin beş elemanı olduğunu farz edelim. Birinci elemanı a_1, ikinci elemanı a_2, üçüncüsünü a_3, dördüncüsünü a_4 ve beşincisini a_5 ile işaret edeceğiz. Bu şekilde dizi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 şeklinde yazılır ya da daha kısa $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ biçiminde yazılabilir.

Şunu da kaydedelim, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 elemanları, herhangi bir kümenin elemanları olabilir. Matematikte, bu elemanlar daha fazla durumlarda sayılardır (doğal, tam, rasyonel ya da reel), fakat sayı olması mecburi değildir.

Örnek, her söz, bir harfler dizisi sayılabilir. Bu durumda a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 elemanları, bir alfabeye aittir. 5 sayısı, incelenen sonlu dizinin **uzunluğudur** ve uzunluk daima aynı değildir. Örnek olarak “EKONOMİ” sözcüğünü alalım. Bunu yedi elemanlı sonlu bir dizi olarak sayabiliriz. Uzunluğu 7’dir. Her sonlu dizi, doğal sayılar kümesinden {1, 2, 3, …. } incelenen kümeye bir eşleme olarak algılayabiliriz. Örneğin “ekonomi” sözcüğünü bir eşleme olarak alıyorsak

$$1 \to e, \quad 2 \to k, \quad 3 \to o, \quad 4 \to n, \quad 5 \to o, \quad 6 \to m, \quad 7 \to i$$

veya

$$f(1) = e, \quad f(2) = k, \quad f(3) = o, \quad f(4) = n, \quad f(5) = o, \quad f(6) = m, \quad f(7) = i$$

şeklinde yazabiliriz.

Buna göre şu sonuca varabiliriz: **Her sonlu dizi a_1, a_2, a_3, a_4,…., a_n, doğal sayılar {1, 2, 3, …, n}’den incelenen diziye bir eşlemedir ve bu durumda *i* ($1 \le i \le n$) elemanına karşılık gelen eleman *i* indisiyle işaret edilir**, a_i, b_i, x_i …gibi. Daha da a_1, a_2, a_3, a_4,…., a_n sonlu bir dizi, kısa olarak (a_i) biçiminde işaret edilir.

Birçok durumlarda sonsuz dizilerle de işimiz olabilir. Onları a_1, a_2, a_3, a_4,…. ile ya da daha kısa (a_i) biçiminde işaret ediyoruz. a_i elemanı *i.* yerde olan elemandır $i \in \{1,2,3,\dots\}$. Bunlar genellikle bazı sayılar olduğundan, ilerde reel sayılar olduğunu sayacağız.

Tanım 1. Dizi, doğal sayılar kümesinden, reel sayılar kümesine bir eşlemedir.

Demek ki, dizi denilince sonsuz diziyi kastedeceğiz, aksi halde sonlu dizi söz konusu olunca, sonlu dizi diye ifade edeceğiz.

1. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ….. dizisini inceleyelim. Bu durumda eşleme

$f(1) = 1, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 5, \quad f(4) = 7, \quad f(5) = 9, \quad f(6) = 11,...$

biçiminde tanımlanmıştır, bunu daha kısa olarak

$f(n) = 2n - 1$, ya da $a_n = 2n - 1$ şeklinde yazabiliriz.◆

2. $f(n) = n + \dfrac{1}{n}$ dizisinin ilk birkaç terimi:

$a_2 = 2 + \dfrac{1}{2} = 2{,}5\,,\ \ a_3 = 3 + \dfrac{1}{3} = 3{,}333...\,,\ \ a_4 = 4 + \dfrac{1}{4} = 4{,}25\,,\ \ a_5 = 5 + \dfrac{1}{5} = 5{,}2\,,$ vb. ◆

3. $a_n = n^2 + n - 1$ dizisinin ilk birkaç terimi: $a_1 = 1^2 + 1 - 1 = 1$, $a_2 = 2^2 + 2 - 1 = 5$, $a_3 = 3^2 + 3 - 1 = 11$, $a_4 = 4^2 + 4 - 1 = 19$, $a_5 = 5^2 + 5 - 1 = 29$ vb. ◆

4. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ dizisinin ilk birkaç terimi: $a_1 = -1\,,\ \ a_2 = \dfrac{1}{2}\,,\ \ a_3 = -\dfrac{1}{3}\,,$ $a_4 = \dfrac{1}{4}\,,\ \ a_5 = -\dfrac{1}{5}\,,$ dir. ◆

5. $a_n = 8$ dizisinin birkaç terimi 8, 8, 8, 8, 8, 8,….dir. Demek ki, n indisine bağlı olmadan a_n teriminin değeri 8 dir. a_n teriminin değeri daima sabit olan bu gibi dizilere **sabit diziler** denir.

Noktaların koordinatlarını $(1,a_1)$, $(2,a_2)$, $(3,a_3)$, $(4,a_4)$,... yani $(n,a_{\ddot{u}})$, $n = 1,2,3,...$ ekleyerek dizileri çoğu kez koordinant düzlemde belirtiyoruz. ◆

6. Genel terimi $a_n = 3 + (-1)^n$ dizisini inceleyelim. n için 1, 2,3, … değerler vermekle 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, …dizisi elde edilir.◆

Alıştırmalar

1. Dizi nedir? Sonlu ve sonsuz dizi için birer örnek yazınız.

2. (a_n) dizisinin ilk 5 terimini yazınız:

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$, b) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, c) $a_n = 2^n$, d) $a_n = (-1)^n n$.

3. (a_n) dizisinin n. ci terimini belirtiniz.

a) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ için $n = 4$, b) $a_n = n^n$ için $n = 3$, c) $a_n = 3$ için $n = 4$.

4. Genel terimi $a_n = (-1)^n n$ olan dizinin, n'in hangi değeri için değeri 2010 dur?

5. n'in hangi değeri için, genel terimi $a_n = 4n - 5$ dizisinin terimi 999 olur?

6. Genel terimi verilmiş olan dizinin dördüncü terimini belirtiniz:

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, b) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, c) $a_n = (-2)^n$, d) $a_n = 3$.

7. İlk beş terimi verilmiş olan dizilerin, genel terimini ifade edecek formül belirtiniz:

a) 3, 5, 7, 9, 11,... b) 1, 4, 9, 16, 25,... c) 1, 3, 1, 3, 1,...

d) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$ e) $4, 2, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots$

1.2. Dizilerin Özellikleri

Dizilerin bazı özellikleri vardır. Bu özellikler genellikle dizilerin artma ve eksilme koşullarıdır.

Tanım 1. (a_n) dizisi için:

- her k doğal sayısı için,

$$a_{k+1} > a_k, \qquad (1)$$

özelliği varsa, dizi kesin anlamda artandır (ya da kesin anlamda monoton artandır);

- her k doğal sayısı için,

$$a_{k+1} < a_k, \qquad (2)$$

özelliği varsa, dizi kesin anlamda eksilendir (ya da kesin anlamda monoton eksilendir);

- her k doğal sayısı için,

$$a_{k+1} \leq a_k, \qquad (3)$$

özelliği varsa, artandır (ya da eksilmeyendir);

- her k doğal sayısı için,

$$a_{k+1} \geq a_k. \qquad (4)$$

özelliği varsa, dizi eksilendir (ya da artmayandır);

Bir dizinin kesin anlamda artan olması için koşul (1) gereğince, dizinin her terimi, kendinden önce gelen terimden büyük olmalıdır.

1. Genel terimi $a_n = 3n - 2$ ile verilmiş olan diziyi inceleyelim. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$, yani, 1 < 4 < 7 < 10 < …. olduğuna göre, bu dizi kesin anlamda artandır. Bunu doğrudan doğruya gösterelim:

a_{n+1} - a_n = 3(+1) - 2 - [3 - 2] = 3 + 3 - 2 - 3 + 2 = 3 > 0,

demek ki, her doğal sayı n için a+1 > a_n geçerlidir.◆

Bir dizinin kesin anlamda eksilen olması için koşul (2) gereğince, dizinin her terimi, kendinden önce gelen terimden küçük olduğunu ifade etmektedir.

2. Genel terimi $a_n = \frac{1}{n}\cdot$ olan diziyi inceleyelim. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$, yani $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \ldots$ olduğuna göre dizi kesin anlamda eksilendir. Bunu doğrudan doğruya gösterelim:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0\,,$$

demek ki, her doğal sayı n için a_{+1}, < a_n geçerlidir.◆

Bir dizinin artan ya da eksilmeyen olması için koşul (3) gereğince, dizinin her terimi, kendinden önce gelen terimden büyük ya da eşit olduğunu yani kendinden önceki terimden küçük olmadığını ifade etmektedir.

3. Şu diziyi inceleyelim: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4,….. Bu dizinin terimleri için 1 ≤ 1 ≤ 2 ≤ 2 ≤ 3 ≤ 3 ≤ 4... geçerli olduğuna göre, dizi eksilmeyendir. Dizi kesin anlamda artan değildir, çünkü ikinci terimi birincisinden büyük değildir, o halde daha fazla inceleme için gerek yoktur. ◆

Bir dizinin eksilen ya da artmayan olması için koşul (4) gereğince, dizinin her terimi, kendinden önce gelen terimden küçük ya da eşit olduğunu yani kendinden önceki terimden büyük olmadığını ifade etmektedir.

4. $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$ dizisini inceleyelim. $1 \geq 1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \geq \ldots$ olduğuna göre, dizi eksilendir ya da artmayandır, çünkü ikinci terimi birincisinden küçük değildir, o halde daha fazla inceleme için gerek yoktur. ◆

Şunu da ifade etmeliyiz ki, her dizi (1), (2), (3) ve (4) özelliklerinden birini sağlaması mecburi değildir. Örnek, böyle bir dizi 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ….. dir. Halbuki bazı dizilerde, bu özelliklerden hiçbiri sağlanmadığına rağmen, belli bir k_0'dan sonra dizinin terimleri (1), (2), (3) ve (4) özelliklerinden birini sağlayabilir. Böyle durumda, dizi kesin anlamda artan, eksilen, artmayan ya de eksilmeyen olduğunu daha geniş anlamda anlaşmaya göre ifade edebiliriz.

5. $3,\ 2,\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{4}{5}, 1\frac{5}{6},\ldots$ dizisini inceleyelim. Bu dizi tanım 1 gereğince artan değildir, çünkü 3 > 2 doğru değildir. Bu dizi daha geniş anlamda artandır diyebiliriz. Çünkü üçüncü terimden başlayarak dizi artandır $1\frac{1}{2} < 1\frac{2}{3} < 1\frac{3}{4} < 1\frac{4}{5} < 1\frac{5}{6} < \ldots$. Bu anlaşma gereklidir, çünkü bize daha çok, n indisinin büyük değerleri için dizinin nasıl olduğu ilgilendirir.◆

6. $1, 2, 1, 2, 1, 1\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{6},\ldots$ dizisini inceleyelim. Bu dizi tanım 1 gereğince eksilen değildir, fakat geniş anlamda eksilen olduğunu sayabiliriz, çünkü altıncı

terimden başlayarak dizi eksilendir, $1\frac{1}{2} > 1\frac{1}{3} > 1\frac{1}{4} > 1\frac{1}{5} > 1\frac{1}{6} > \ldots$ ◆

Örnek 6.'daki diziyi inceleyelim. Dizinin her terimi 2'den küçük ya da eşit olduğunu görüyoruz, yani $a_n \leq 2$ dir. Bu nedenle bu gibi dizilere üstten sınırlı olduklarını diyeceğiz, yani daha kesin ifadeyle dizi 2 sayısıyla sınırlıdır. Bu özellik bizi şu tanımı çağrıştırıyor:

Tanım 2. Bir dizide her n doğal sayısı için

$$a_n \leq M. \tag{5}$$

olmak üzere bir M reel sayısı varsa diziye **üstten sınırlıdır** denir.

Benzer tanım alttan sınırlı olan diziler için ifade edebiliriz:

Tanım 3. Bir dizide her n doğal sayısı için

$$a_n \geq M. \tag{6}$$

olmak üzere bir M reel sayısı varsa diziye **alttan sınırlıdır** denir.

7. Örnek 2 deki $a_n = \frac{1}{n}$ dizisini inceleyelim. Bu dizi eksilendir, çünkü $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$ Bu durumda ilk terim a_1=1 dir ve dizinin en büyük terimidir. O halde bu dizi 1 sayısı ile üstten sınırlıdır. ◆

Bu örneğe benzer olarak, şu özellik geçerlidir:

1°. Her eksilen ve her artmayan dizi üstten sınırlıdır.

8. Örnek 1'de verilmiş olan $a_n = 3n - 2$ genel terimli diziyi inceleyelim. Bu dizi arftandır, çünkü $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 <$ dir. Bu dizide ilk terim a_1=1 dir ve dizinin en küçük terimidir. O halde bu dizi alttan 1 sayısıyla sınırlıdır. ◆

Bu örneğe benzer olarak, şu özellik geçerlidir:

2°. Her artan ve her eksilmeyen dizi alttan sınırlıdır.

Hem üstten, hem de alttan sınırlı olan dizilere sınırlı diziler denir. Onları şu şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 4. Bir dizide her doğal sayı için

$$|a_n| \leq M \qquad (7)$$

olacak şekilde pozitif bir M reel sayısı varsa diziye sınırlıdır denir.

Örnek 2'deki dizi (1 sayısıyla) sınırlı,, örnek 4'teki dizi de 1 sayısıyla sınırlıdır, Örnek 5'teki dizi 3 sayısıyla sınırlıdır, örnek 6 daki dizi 2 sayısıyla sınırlıdır. Örnek 1 ve 3'teki diziler sınırlı değildir.

Alıştırmalar

1. Hangi diziler kesin anlamda artan, eksilen, artmayan, eksilmeyendir?

2. Kesin anlamda artan, eksilen, artmayan, eksilmeyen diziler için örnekler yazınız.

3. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ dizisi artan yoksa eksilen midir?

4. Şu dizilerden hangisi kesin anlamda artan, hangisi ise eksilendir:

a) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$, b) $a_n = \dfrac{1}{3^n}$, c) $a_n = \dfrac{1}{n^2 + (-1)^{n+1}}$, d) $a_n = 2^n - 5$, e) $a_n = \dfrac{5^n}{n}$,

5. a) Bir dizi aynı zamanda hem artan, hem de eksilen olabilir mi?
b) Sabit dizi, artan yoksa eksilen midir?

6.* a pozitif sayısının hangi değeri için $a_n = a^n$ dizisi:
a) artan; b) eksilen; c) sabittir;
d) üstten sınırlı; e) alttan sınırlı; f) sınırlıdır?

1.3. Aritmetik Diziler

Bazı diziler, gerek matematikte, gerek günlük hayatta olsun daha fazla rastlandığına göre, uygulamaları da fazladır. Bu nedenle onlara özel adlar da verilir. Bu başlıkta, iki özel diziden bahsedeceğiz: Aritmetik diziler ve geometrik diziler.

Doğal sayılardan oluşan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … diziyi inceleyelim. Bu dizide 2 – 1 = 3 – 2 = 4 – 3 = ….ya da genel olarak iki ardışık terimin farkı daima eşittir. Bu özellikten yararlanarak şu tanımı kabul edeceğiz.

Tanım 1. Bir (a_n) dizisinde iki ardışık terimin farkı $a_{n+1} - a_n$ daima sabit kalıyorsa, yani n doğal sayısına bağlı değilse, ya da $a_{n+1} - a_n = d$ olacak şekilde bir d reel sayısı varsa (an) dizisine aritmetik dizisi denir. d sayısına ortak fark denir.

Aritmetik dizilerinden daha birkaç örnek inceleyelim.

1. -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14,… dizisi aritmetik dizidir. Çünkü her terim kendinden önceki terime 3 katmakla elde edilir, yani - 4 + 3 = -1, -1 + 3 = 2, 2 + 3 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 3 = 11,... Bu durumda $d = 3$'tür. ◆

2. 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, … dizisi aritmetik dizidir. Çünkü her terim kendinden önceki terime -2 katmakla elde edilir, yani 5 - 2 = 3, 3 - 2 = 1, 1 - 2 = -1, -1 - 2 = -3, - 3 - 2 = -5,... Bu durumda $d = -2$'dir. ◆

3. 6, 6, 6, 6, 6, 6 …. dizisi aritmetik dizidir. Çünkü her terim kendinden önceki terime 0 katmakla elde edilir. Bu durumda $d = 0$'dır. Aslında her sabit dizi aritmetik dizidir. ◆

Şunu fark edebiliriz, bir aritmetik dizisinin ilk terimi ve ortak farkı verildiğinde, dizinin tüm terimlerini bulabiliriz. Bunu aşağıdaki şekilde yapacağız:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$

....

Bu yöntemi devam ederek a_k. terimi için

$$a_k = a_1 + (k - 1)d. \qquad (1)$$

elde edilir.

Bu aslında dizinin genel terimi için istenilen formüldür. Gerçekten $k = 1$ için $a_1 = a_1$ ‘dir, a_{k+1} için yine aynısı elde edilir:

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)\,d + d = a_1 + kd.$$

Buna göre şu sonuca varılır: Her doğal sayı k için şu formül geçerlidir:

$$\boxed{a_k = a_1 + (k-1)d.}$$

4. Bir ayakkabı fabrikasında ilk yıl 50 000 çift ayakkabı üretilmiş ve her gelen yılda 3000 çift ayakkabı için üretim artmıştır. Fabrika kuruluşundan sekizinci yıl sonunda kaç çift ayakkabı üretmiştir?

a_k ile, fabrikanın kuruluşundan k. cı yılın üretimini işaret edelim. Yıllara göre üretim miktarları bir aritmetik dizisini oluşturdukları açıktır. Dizinin ilk terimi $a_1 = 50\,000$ ve ortak fark $d = 3\,000$’dir. $k = 8$ için (1) formülünden yararlanarak $a_8 = a_1 + (8 - 1)d = 50000 + 7 \cdot 3000 = 71000$ elde edilir.

Demek ki, fabrikanın kuruluşundan sekizinci yılında 71 000 çift ayakkabı üretilmiştir. ◆

5. Bir aritmetik dizisinin ilk terimi 8, 15. terimi ise 50’dir. Ortak fark d ne kadardır?

(1) denklemini d’ye göre çözersek:

$$d = \frac{a_k - a_1}{k-1}$$

elde edilir. Verilen değerleri formülde yerine koyarsak

$$d = \frac{a_k - a_1}{k-1} = \frac{50-8}{15-1} = \frac{42}{14} = 3$$

elde edilir. ◆

6. Bir aritmetik dizisinin ilk terimi – 3, ortak farkı $d = -2$’dir. Dizinin hangi terimi -19 olduğunu bulunuz.

(1) denklemini k’ya göre çözersek:

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1$$

elde edilir. Verilen değerleri formülde yerine koyarsak

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 = \frac{-19-(-3)}{-2} + 1 = \frac{-19+3}{-2} + 1 = \frac{-16}{-2} + 1 = 9\,.$$

elde edilir. Demek ki, dizinin dokuzuncu terimi −19 olur. k için çözüm, ancak doğal sayı olduğu durumda kabul edilebilir. ◆

Alıştırmalar

1. 150-ci tek sayı hangi sayıdır?

2. 75. çift sayıyı hesaplayınız.

3. Ortak farkı 2,3 ve 85. terimi 270,8 olan aritmetik dizisinin ilk terimi belirtilsin.

4. Verilen dizilerden hangileri aritmetik dizisidir:

a) 2, 8, 14, 20, 26,...,$6n$-4,... b) 1, 8, 27, 81, n^3,...

c) 9,4, -1, - 6, -11,...,14 - $5n$,... d) 1, 2, 4, 8, 16,...,2^{n-1},...?

5. Bir iş örgütünün 1 ocak 2000 yılında borcu 50 000 EUR olmakla, her gelen yılda borç 3500 EUR azalmıştır. Kaç yıl sonra borç 22000 EUR kalmıştır?

6. -3, 1, 5, 9, 13, 17, … aritmetik dizisinde, çift indisli yerlerdeki terimleri silersek, nasıl dizi elde edilecektir?

7*. Bir aritmetik dizisinin beşinci terimi 12, on ikinci terimi ise 33'tür. Aritmetik dizisinin ilk terimi ve ortak farkı ne kadardır?

8*. Banka hesabında bir miktar parası olan Yusuf, her ay aynı miktar para hesabına yatırıyor. Tasarruf yapmaya başladıktan 16 ay sonra, Yusuf'un 81 500 denarı, 27 ay sonra ise 81500 denarı olmuştur. Tasarrufa başlamadan önce Yusuf'un banka hesabında kaç parası varmış ve her ay banka hesabına ne kadar para yatırmıştır?

1.4. Aritmetik Dizilerin Özellikleri

A. Şu örneği inceleyelim.

1. 1, 4, 7, 10, 13, 16 sonlu aritmetik dizisi için:

1 + 19 = 4 + 16 = 7 + 13 = 10 + 10 = 13 + 7 = 16 + 4 = 19 + 1 (= 20) geçerlidir. ◆

Genel olarak, $a_1, a_2, a_3, ..., a_m, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. sonlu aritmetik dizisi verilmiş olsun:

Şu çiftleri inceleyelim:

$(a_1; a_n)$, $(a_2; a_{n-1})$, $(a_3; a_{n-2})$, . . . ,$(a_m; a_{n-m+1})$, . . ., $(a_n; a_1)$,

burada indislerin toplamı n + 1'dir (1 + n = n +1, 2 + (-1) = n +1, 3 + (- 2) = n +1,..., m + (- m +1) = n +1,...). Bu çiftlere a_1 ve $\mathbf{a_n}$ **uç terimlerden eşit uzaklıkta olan terimler** denir.

$a_m = a_1 + (m-1)d$ ve $a_{n-m+1} = a_1 + (n-m)d$ olduğuna göre, onların toplam.

$a_m + a_{n-m+1} = a_1 + (m-1)d + a_1 + (n-m)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$.

Bu toplam, m sayısına bağlı olmadığını görüyoruz. Yani,

m = 1,2,3, …. için, $a_m + a_{n-(m-1)} = a_1 + a_n$, 'dir.

Bununla şu özelliği ispatlamış oluyoruz:

1⁰. Her aritmetik dizisinde, uç terimler a_1 ve a_n den eşit uzaklıkta olan terimlerin toplamı uç terimlerin $a_1 + a_n$ toplamına eşittir.

2. 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, … aritmetik dizisini inceleyelim. $n = 5$ için (1^0) özelliği
$5 +13 = 7 +11 = 9 + 9 = 11 + 7 = 13 + 5 \quad (= 18)$,
$n = 6$ için ise bu özellik
$5 +15 = 7 +13 = 9 +11 = 11 + 9 = 13 + 7 = 15 + 5 \quad (= 20)$. ♦

3. Örnek 2'deki diziyi inceleyelim. Dizinin ikinci terimi (7), ilk (5) ve üçüncü (9) terimin aritmetik ortası olduğunu; Üçüncü terimi (9), ikinci terim (7) ve dördüncü terim (11) aritmetik ortası olduğunu fark edebilirsiniz.

Bu özellik genel olarak da geçerlidir.

2⁰. Her aritmetik dizisinde a_m terimi a_{m-1} ve a_{m+1} terimlerinin aritmetik ortasıdır, yani $1< m$ için $a_m = \dfrac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}$ dir.

4. Herhangi bir aritmetik dizisinde

$$a_{2010} + a_{1020} = 2 \cdot a_{1515}$$

geçerli olabilir mi? ♦

Sorunun cevabı pozitiftir, çünkü indislerin toplamı eşittir: 2010 + 1020 = 1515 + 1515 dir. Buna göre (a_{2010}; a_{1020}) ve (a_{1515}; a_{1515}) terimler çifti a_1 ve a_{3029} uç terimlerden eşit uzaklıktadır.

$a_{1515} = \dfrac{a_{1020} + a_{2010}}{2}$ örnek 4'te ispatlandığı gibi, aritmetik dizilerine ait şu özellik de ispatlanır.

3⁰. Herhangi aritmetik dizisinde $k < m$ olmak üzere $a_m = \dfrac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}$, geçerlidir. Diğer sözlerle a_m terimi, a_{m-k} ve a_{m+k} terimlerinin aritmetik ortasıdır.

Alıştırmalar

1. Verilen sayıların aritmetik ortalamasını belirtiniz: a) 15 ve 23; b) $x + y$ ve $x - y$.

2. Herhangi (sonlu) bir aritmetik dizisini seçiniz ve 1, 2 ve 3 özelliklerini yoklayınız.

3. Herhangi bir aritmetik dizisi verilmiş olsun. Değeri $\frac{a_1 + a_{2n+1}}{2}$ ye eşit olan bir terimin var olduğunu gösteriniz.

4*. Herhangi bir aritmetik dizisini seçiniz. İndisler arası $p + q + r = s + t + u$ eşitliği varsa $a_p + a_q + a_r = a_s + a_t + a_u$ eşitliği de geçerli olacağını gösterinin. Ondan sonra bunu genel durum için ispatlamaya çalışınız.

5*. $a_7 + a_{11} = a_5 + a_{20}$ geçerli olan bir aritmetik dizisi için ne diyebilirsiniz?

1.5. Bir Aritmetik Dizisinin İlk n – Teriminin Toplamı

Çok kez, ilk terimi a_1 ve ortak farkı d ile verilmiş olan bir aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamını belirtmek gerekir. Aranılan toplamı S_n ile işaret edeceğiz.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n .$$

Bu toplamı ters yönde yazarsak

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1$$

geçerli olduğunu fark edebiliriz Bu iki denklemi taraf tarafa toplamakla:

$2S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1) = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1)$ elde edilir. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots$ olduğuna göre, $2S_n = n(a_1 + a_n)$ elde edilir. Oradan da

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}. \qquad (1)$$

elde edilir. Bu formülde $a_n = a_1 + (n - 1)d$ değiştirmekle

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}. \qquad (2)$$

formülü elde edilir.

Bu formül, bir aritmetik dizisinin aranılan ilk n teriminin toplamıdır. Formül a_1, d, n ve S_n büyüklükleri arasındaki bağıntıyı göstermektedir ve bu büyüklüklerden herhangi biri bilinmediğinde diğer üç bilinen büyüklükle belirtilebilir.

1. İlk n tek sayının toplamını hesaplayınız.

(2) formülünde $a_1 = 1$ ve $d = 2$ ile değiştiriyoruz:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(2 + 2(n-1)) = \frac{n}{2}(2n) = n^2 . \blacklozenge$$

2. Bir ayakkabı fabrikasında ilk yıl 50 000 çift ayakkabı üretilmiş ve her gelen yılda 3000 çift ayakkabı için üretim artmıştır. Fabrika kuruluşundan sekizinci yıl sonuna kadar toplam kaç çift ayakkabı üretmiştir?

(2) formülünde $n = 8$, $a_1 = 50\,000$ ve $d = 3\,000$ ile değiştiriyoruz:

$$S_8 = \frac{8}{2}[2 \cdot 50000 + 7 \cdot 3000] = 4 \cdot 121000 = 484000 .$$

Demek ki, ilk sekiz yılda toplam 484 000 çift ayakkabı üretilmiştir.

3. a1 = 7, d = 5 ve Sn = 243 için son aritmetik dizisinin ne kadar üyesi vardır?

Değerleri değiştirerek (2) şu sonuca ulaşırız:

$$243 = \frac{n}{2}(14 + 5(n-1)) = \frac{5n^2 + 9n}{2} \text{, yani } 5n^2 + 9n - 486 = 0 .$$

Bu denklemin çözülmesiyle iki sonuç elde edilir: n1 = 9 ve n2 = -10,8. Görülüyor ki ikinci çözüm anlamsızdır. Demek ki n = 9, böylelikle aritmetik dizisi şöyledir: 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47. ◆

Alıştırmalar

1. İlk n çift sayının toplamını hesaplayınız.

2. İlk 1000 doğal sayının toplamını hesaplayınız.

3. Bir aritmetik dizisinin 78 teriminin toplamı ne kadardır:

a) $a_1 = 5$ ve $d = 3$; b) $a_1 = -2$ ve $d = 2$?

4. İlk terimi 7, yüzüncü terimi 53 olan aritmetik dizisinin ilk 100 teriminin toplamını beşirtiniz.

5. İlk n doğal sayının toplamı 1275'tir. n ne kadardır?

6*. $a_2 = 6$ ve $a_{45} = 74$ olan bir aritmetik dizisinin ilk 46 teriminin toplamını belirtiniz.

1.6. Geometrik Diziler

Aritmetik dizilerde iki ardışık terimin farkı daima aynı sayı olduğunu gördük. Bu ders biriminde, iki ardışık terimin bölümü daima sabit olan dizilerden söz edilecektir. Örnek, böyle bir dizi 1, 10, 100, 1000, 10 000, …dir., çünkü

$$\frac{10}{1}=\frac{100}{10}=\frac{1000}{100}=\frac{10000}{1000}=\ldots$$

özelliği vardır. Görüldüğü gibi her gelen terim kendinden önceki terimden 10 kat büyüktür. Daha sonra, bu dizilerin tasarruf yatırımlarda, faizin hesaplanması için uygulamaları olduğunu göstereceğiz..

Tanım 1. $q \neq 0$ olmak üzere,

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ldots \tag{1}$$

biçiminden (a_n) dizisine **geometrik dizi** denir.

Görüldüğü gibi, dizinin her gelen terimi, kendinden önce olan terimin $q \neq 0$ sayısıyla çarpılarak elde edilir. a elemanı dizinin ilk terimidir, q sayısına ise ortak bölen ya da ortak çarpandır denir, çünkü

$$q=\frac{aq}{a}=\frac{aq^2}{aq}=\frac{aq^3}{aq^2}=\ldots \text{ dir.}$$

1. 3, 6, 12, 24, 48, 96, … dizisi, ilk terimi 3 ve ortak böleni 2 olan bir geometrik dizidir $2\left(=\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=\frac{24}{12}=\frac{48}{24}=\ldots\right)$. ◆

2. İlk terimi 2 ve ortak çarpanı -3 olan geometrik dizisini oluşturunuz.
Aranılan dizi: $2,\ 2\cdot(-3),\ 2\cdot(-3)^2,\ 2\cdot(-3)^3$ ya da 2, -6, 18, -54, … ◆

3. İlk terimi 18 ortak böleni $\frac{1}{3}$ olan dizi: $8,\ \frac{18}{3}=6,\ \frac{6}{3}=2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{27},\ldots$ ◆

q > 1 ise, geometrik dizi $a_1 > 0$ için artandır, $a_1 < 0$ için ise eksilendir.

4. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, … dizisinde $a_1 = 1 > 0$ ve q = 2 olduğuna göre dizi artandır. ◆

5. -1, -2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, … dizisinde $a_1 = -1 > 0$ ve q = 2 > 1 olduğuna göre dizi eksilendir. ◆

q = 1 ise, dizi sabittir, örnek: -5, -5, -5, -5, -5, …..

$0 < q < 1$ olduğu durumda, geometrik dizi $a_1 > 0$ için eksilendir, $a_1 < 0$ için ise artandır.

6. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$ dizisinde $a_1 = 1 > 0$ ve $q = \frac{1}{2} < 1$ olduğuna göre dizi eksilendir. ◆

7. $-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots$ dizisinde $a_1 = -1 < 0$ ve $q = \frac{1}{2} < 1$ olduğuna göre dizi artandır. ◆

$q < 0$ ise, dizinin terimlerinin işareti değişken olduğundan dizi ne artan ne de eksilendir. Bunu Örnek 2'de görebilirsiniz.

(1) formülünden şunları yazabiliriz:

$a_2 = a_1 q$,

$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$,

$a_4 = a_3 q = a_1 q^3$,

$a_5 = a_4 q = a_1 q^4$,

...

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}. \qquad (2)$$

Dizinin ilk terimi ve ortak çarpanı bilindiğinde, (2) formülünden yararlanarak dizinin herhangi terimini belirtebiliriz.

8. $a_1 = -162$ ve $q = -\frac{1}{3}$ olan bir geometrik dizisinin altıncı terimi (2) formülü gereğince:

$$a_6 = (-162) \cdot (-\frac{1}{3})^5 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^5} = \frac{2}{3}. ◆$$

9. Bir geometrik dizisinin dördüncü terimi 162, altıncı terimi ise 1458'dir. Dizinin ilk terimini ve ortak bölenini belirtiniz.

(2) formülünden $n = 4$ ve $n = 6$ için

$162 = a_1 q^3$ ve $1458 = a_1 q^5$ denklemleri elde edilir.

İkinci denklemi birinci denklemle bölmekle, $9 = q^2$ ve oradan $q = \pm 3$ elde edilir. $q = 3$ için birinci denklemden $a_1 = \frac{162}{3^3} = 6$, elde edilir. $q = -3$ için, birinci denklemden $a_1 = \frac{162}{(-3)^3} = -6$ elde edilir. ◆

Alıştırmalar

1. Bir geometrik dizisinin ilk iki terimi 48 ve 24'tür. Dizinin beşinci terimini belirtiniz.

2. Verilen dizilerden hangileri geometrik dizilerdir:

a) 2, - 8,32, -128,512.....$2 \cdot (-4)^{n-1}$,... b) 1,8,27,81,..., n^3,...

c) 9,4, -1, - 6, -11,...,14 - 5n,... d) 1,2,4,8,16.....2^{n-1},...?

Geometrik dizisi olanların ilk terimini ve ortak bölenini belirtiniz.

3. a) İlk terimi 2 ve ortak böleni 1,5 olan geometrik dizinin beşinci terimini bulunuz.

b) İlk terimi 1,5 ve ortak böleni -2 olan geometrik dizinin yedinci terimini bulunuz.

4. Sütte bakteri sayısı her 3 saatte iki katına artar. 24 saatte bakteri sayısı kaç defa artacaktır?

5. Ali ve Bekir bir bankaya aynı miktar para yatırmışlar. Ali, %3 faiz oranıyla 4 yıl için, Bekir ise %4 faiz oranıyla 3 yıl için yatırmıştır. Hangisi bankadan daha çok para almıştır?

6*. Erdinç, yıllık %6 faiz oranıyla bankaya bir miktar para yatırmıştır.

a) Yedi yıl sonra yatırdığı para yüzde kaç artacaktır?

b) Kaç yıl sonra banka hesabındaki para ana paranın en az iki katına çıkacaktır?

1.7. Geometrik Dizisinin Özellikleri

1. $\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128.$ sonlu geometrik dizisini inceleyelim.

$\frac{1}{2} \cdot 128 = 2 \cdot 32 = 8 \cdot 8 = 32 \cdot 2 = 128 \cdot \frac{1}{2}$ olduğunu fark ediyoruz. ◆

Bu özellik, genel durumda da geçerli olduğunu göstereceğiz. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sonlu geometrik dizisi verilmiş olsun. $a_2 = a_1$ ve $a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$ olduğunu göz önünde bulundurarak

$a_2a_{n-1} = a_1q \cdot \frac{a_n}{q} = a_1a_n$ elde edilir. Ondan sonra $a_3 = a_2q = a_1q^2$ ve $a_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{q} = \frac{a_n}{q^2}$:

olduğundan $a_3a_{n-2} = a_1q^2 \cdot \frac{a_n}{q^2} = a_1a_n$. elde edilir.

Bu şekilde devam etmekle $a_k = aq^{k-1}$ ve $a_{n-(k-1)} = \frac{a_n}{q^{k-1}}$, buradan da

$$a_ka_{n-(k-1)} = a_1q^{k-1} \cdot \frac{a_n}{q^{k-1}} = a_1a_n. \qquad (1)$$

İndisleri toplamı $n + 1$ olan

$(a_2; a_{-1})$, $(a_3; a_{n-2})$, $(a_4; a_{n-3})$,... $(a_k; a_{n-k+1})$,... $(a_{-1}; a_2)$ çiftlere, a_1 ve a_n **uç terimlerden eşit uzaklıkta olan terimler** denir. Buna göre (1) eşitliği şu özelliği ifade etmektedir:

1^0. Her geometrik dizide, a_1 ve a_n uç terimlerden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı, uç terimlerin çarpımına eşittir.

2. Şu geometrik dizisini inceleyelim: 2, 6, 18, 54, 162, 486, … $n = 5$ ve $n = 6$ için bu özelliği yoklayalım:

$n = 5$ için, $2 \cdot 162 = 6{\cdot}54 = 18 \cdot 18 = 54{\cdot}6 = 162 \cdot 2 \quad (= 324)$

$n = 6$ için, $2{\cdot}486 = 6{\cdot}162 = 18{\cdot}54 = 54{\cdot}18 = 162{\cdot}6 = 486{\cdot}2 \quad (= 972)$. ♦

3. Örnek 2'deki diziyi inceleyelim. İkinci terim (6), birinci (2) ve üçüncü (18) terimlerinin geometrik ortası; üçüncü terim (18), ikinci terim (6) ve dördüncü terim (54) sayılarının geometrik ortası; dördüncü terim (54), üçüncü terim (18) ve beşinci terim (162)'nin geometrik ortası olduğunu vb. fark edebiliriz. ♦

Genel olarak, $a_m = \frac{a_{m+1}}{q}$ ve $a_m = a_{m-1}q$, olduğuna göre

$$(a_m)^2 = a_{m-1}a_{m+1}, \quad a_m = \sqrt{a_{m-1}a_{m+1}}.$$

Buna göre şu özellik geçerlidir:

2^0. Her geometrik dizisinde $1 < m$ için, $a_m = \sqrt{a_{m-1}a_{m+1}}$, dir, yani a_m terimi a_{m-1} ve a_{m+1} terimlerinin geometrik ortasıdır.

Benzer şekilde, 2^0 özelliğinin daha genelini ifade eden şu özelliği de ispatlayabiliriz.

3^0. Her geometrik dizisinde k < m için, $a_m = \sqrt{a_{m-k}a_{m+k}}$, dir, yani a_m terimi a_{m-k} ve a_{m+} terimlerinin geometrik ortasıdır.

4. 3 ve 192 sayıları arasında verilenlerle beraber geometrik dizisi oluşturacak 5 sayı yerleştiriniz.

Önce, $a_1 = 3$ ve $a_7 = a_1q^6$'den q ortak bölenini belirtiyoruz. $a_1 = 3$ değerini değiştirmekle $3 \cdot q^6 = 192$ eşitliğinden $q^6 = 64$ ve $q = \pm 2$ elde edilir. $q = 2$ ise, şu dizi elde edilir:

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, …, q = -2 ise 3, - 6, 12, -24, 48, -96, 192. ◆

Alıştırmalar

1. a) 30 ve 120; b) xy ve $\frac{x}{y}$ sayılarının geometrik ortasını belirtiniz.

2. Herhangi bir geometrik dizisini seçiniz ve 1, 2 ve 3 özelliklerini yoklayınız.

3. Herhangi bir geometrik dizisi verilmiş olsun. Verilen dizide değeri $\sqrt{a_1a_{2n+1}}$ olan teriminin var olduğunu ispatlayınız.

4. 3, b, 75 sayıları bir geometrik dizisi olacak şekilde b sayısını belirtiniz.

5*. Bir geometrik dizisinde $a_2a_3 = a_1a_7$ sağlandığı durumda, dizi için ne diyebiliriz?

1.8. Geometrik Dizisinin İlk *n*- Teriminin Toplamı

Bir geometrik dizisinin ilk n – teriminin toplamını S_n ile işaret edelim.

$$S_n = a_1 + aq + aq^2 + ... + aq^{n-2} + a^{-1}. \qquad (1)$$

Bu denklemin her iki tarafını q ile çarpmakla

$$S_n = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{-1} + aq. \qquad (2)$$

(2) eşitliğinden (1) eşitliği çıkarılırsa:

$$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1,$$

oradan

$$S_n(q-1)=a_1(q^n-1),$$

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}. \qquad (3)$$

elde edilir. Bu ise, bir geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamını ifade eden formüldür. Formülde a_1, q, n ve S_n büyüklükleri bulunur ve bu büyüklüklerden her biri, bilinen diğer üç büyüklükle hesaplanabilir. (3) formülü, genellikle $q > 1$ için uygulanır, $q < 1$ olduğu durumda aynı formül şu şekilde yazılarak kullanılır:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \qquad (4)$$

$q = 1$ ise, bu formüller kullanılamaz, çünkü kesrin hem payı, hem de paydası sıfır olur. Halbuki bu durumda $S_n = na_1$ olduğu açıktır.

1. İlk terimi $a_1 = 3$ ve $q = 2$ verilmiş olan geometrik dizisinin ilk 6 teriminin toplamını belirtiniz.

$a_1 = 3$ ve $q = 2$ değerlerini formülde değiştirmekle

$$S_6=\frac{3(2^6-1)}{2-1}=3\cdot(64-1)=3\cdot 63=189$$

elde edilir. ◆

2. Bir geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı için kullanılan formülden yararlanarak şu özdeşliğin geçerli olduğunu ispatlayınız:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}).$$

(3) denkleminde $a_1 = 1$ koyarsak

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1},$$

$$q^n-1=(q-1)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}).$$

elde edilir. Orada q yerine $q=\frac{a}{b}$ koymakla

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n-1=\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(1+\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}\right).$$

elde edilir. Bu denklemi b^n ile çarpmakla:

$$a^n-b^n=(a-b)(b^{n-1}+ab^{n-2}+a^2b^{n-3}+\ldots+a^{n-1}),$$

elde edilir.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})\,.\blacklozenge$$

3. Bir geometrik dizisinin son terimi 112, terimlerinin toplamı 217 ve ortak çarpanı 2'dir. Dizinin ilk terimi belirtilsin.

İlk n teriminin toplamı formülünden,

$a_1 \cdot 2^{n-1} = 112$, $\dfrac{a_1(2^n - 1)}{2-1} = 217$, ya da $a_1 \cdot 2^n - a_1 = 217$. elde edilir. Birinci denklemi 2 ile çarparak ikincisinden çıkarırsak $-a_1 = 217 - 2 \cdot 112 = -7$, oradan da $a_1 = 7$ elde edilir. Bunu birinci denklemde değiştirmekle $2^{n-1} = 2^4$ ve oradan $n = 5$ elde edilir. ◆

Alıştırmalar

1. Verilen geometrik dizisinin ilk 8 teriminin toplamını belirtiniz:

a) −1, 3, − 9,... b) 5, 5, 5,..., c) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,..., d) 512, —256, 128,...

2. Verilenlere göre geometrik dizisinin ilk terimini belirtiniz:

a) $n = 8$, $q = 2$, $S_6 = 765$, b) $n = 4$, $q = \frac{2}{3}$, $S_6 = 65$.

3. Bir geometrik dizisinin beşinci terimi $\frac{1}{9}$, ve ortak çarpanı $-\frac{1}{3}$. 'dir. İlk terimini ve ilk beş teriminin toplamını belirtiniz. Geometrik dizisini yazınız.

4. Ahmet, ocak ayında 20 000 denar maaş almıştır. Yıl sonuna kadar maaşı her ay % 3 artmıştır. Ahmet yıl boyunca toplam ne kadar maaş almıştır?

5*. Bir geometrik dizisinin ilk n – teriminin toplamı için kullanılan formülden yararlanarak şu özdeşliğin geçerli olduğunu ispatlayınız:

1.9. Konu Pekiştirme Ödevleri

1. Ne artan ne de eksilen olan bir diziyi yazınız.

2. (a_n) dizisini tek indisli terimleri pozitif, çift indisli terimleri ise negatiftir. Bu dizi artan ya da eksilen olabilir mi?

3. 1 ve 14 sayıları arasında öyle üç sayı *a, b* ve *c* koyunuz ki, 2, *a, b, c,* 14 bir geometrik dizisi olsun.

4. Herhangi bir aritmetik dizisi için $a_n = a_k + (- k)d$. geçerli olduğunu gösteriniz.

5. Bir tüccar satranç tablosunu şu koşullara göre satıyormuş: Tablonun birinci karesinde 1 denar, ikinci karesinde 2 denar, üçüncüsünde 3 denar vb. Tüccar satranç tablosunu kaç denara satıyormuş?

6*. a) a_1, a_2, $a_{3,}$ dizisi, aynı anda hem aritmetik, hem de geometrik dizisi ise $a_1 = a_2 = a_3$ olduğunu ispatlayınız.

b) a_1, a_2, a_3,...,a_n dizisi aynı anda hem aritmetik, hem de geometrik dizisi ise $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$ olduğunu ispatlayınız.

7. Her geometrik dizide $a_n = a_k q^{n-k}$ geçerli olduğunu ispatlayınız

8. Her bakteri bir saatte ikiye katlanırsa, başlangıçta 7 bakteri olan bir bitkide 8 saat sonra ne kadar bakteri olacaktır?

9. Bir çocuk ocak ayında kumbarasına 5 denar koyarak para biriktirmeye başlamıştır. Ondan sonra her ay bir önceki ayın iki katı kadar kumbarasına para koymuştur. Yıl sonunda çocuğun kumbarasında ne kadar para birikmiştir?

10*. Her geometrik dizisinde, ilk n – teriminin çarpımı $a_1 a_2 \ldots a_n = (a_1 a_n)^{n/2}$ olduğunu ispatlayınız.

Konu Özetleri

Dizi, N doğal sayılar kümesinden, R reel sayılar kümesine bir eşlemedir.

- $a_{k+1} > a_k$ ise, dizi her doğal sayı için kesin anlamda **artandır**;
- $a_{k+1} < a_k$ ise, dizi her doğal sayı için kesin anlamda **eksilendir**;
- $a_{k+1} \leq a_k$ ise, dizi her doğal sayı için **artmayandır**;
- $a_{k+1} \geq a_k$ ise, dizi her doğal sayı için **eksilmeyendir**;
- Her doğal sayı n için $a_n \leq M$ olacak şekilde M reel sayısı varsa dizi **üstten sınırlıdır** denir.
- Her doğal sayı n için $a_n \geq M$ olacak şekilde M reel sayısı varsa dizi **alttan sınırlıdır** denir.
- Hem üstten hem de alttan sınırlı olan dizilere **sınırlı diziler** denir.

Her eksilen ve her artmayan dizi üstten sınırlıdır; her artan ve her eksilmeyen dizi alttan sınırlıdır.

Bir (a_n) dizisinde iki ardışık terimin farkı $a_{n+1} - a_n$ daima sabit kalıyorsa, yani n doğal sayısına bağlı değilse ya da $a_{n+1} - a_n = d$ olacak şekilde bir d reel sayısı varsa (a_n) dizisine **aritmetik dizisi** denir. d sayısına **ortak fark** denir.

Bir aritmetik dizisinin genel terimi:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}.$$

Her aritmetik dizisinde a_m terimi a_{m-1} ve a_{m+1} terimlerinin aritmetik ortasıdır, yani $1 < m$ için

$$\boxed{a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}}$$ dir.

Bir aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamı

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)},$$ dir.

ya da

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}.$$

$q \neq 0$ olmak üzere $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,...$ biçiminden (a_n) dizisine **geometrik dizi** denir. Bu dizinin genel terimi

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$ dir.

Her geometrik dizide, a_1 ve a_n uç terimlerden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı, $a_1 a_n$ uç terimlerin çarpımına eşittir.

$$\boxed{a_m = \sqrt{a_{m-k} a_{m+k}}}$$

Bir geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$ dir.

2. BİLEŞİK FAİZ HESABI

2.1. Bileşik Faiz Kavramı ve Hesaplanması

Bir miktar paranın faizinin hesaplanması basit ve bileşik faiz hesaplamasıyla yapılabilir. **Basit faiz**, bir yatırımın, yatırım vadesi süresince sadece anaparasının kazandığı faiz oranıdır.

Bileşik faizde, yatırılan miktar para her dönemde değişir, yani her dönem sonunda elde edilen faiz miktarı anaparaya eklemekle yatırım miktarı büyür ve gelecek dönemde aynısı anapara oluyor. Buna göre **bileşik faiz** için şu tanımı kabul edebiliriz: Bir yatırımın yatırım vadesi boyunca kazandığı faizin de yeni yatırım vadesinde yatırıma tabi tutulması sonucu elde edilen getiriyi gösteren faizdir. Diğer bir deyişle **faizin de faiz kazanmasıdır.**

Basit faiz $i = \frac{Kpt}{100}$, formülüyle hesaplanır (t yıl sayısıdır). Zaman aylar ile verildiğinde $i = \frac{Kpm}{1200}$, formülüyle hesaplanır. Bu durumda m ay sayısıdır ve zaman günlerle ifade edilirse $i = \frac{Kpd}{36500}$ formülü kullanılır (d – gün sayısı).

1. 24 000 denar temel kapital için 8 ayda %6 faiz oranıyla ne kadar faiz ödenecektir?

Verilenlere göre, K = 24 000, t = 8 ay, p = % 6'dır.

$i = \frac{Kpt}{1200} = \frac{240000 \cdot 6 \cdot 8}{1200} = 9600$ denar. ◆

2. 1620000 denar anapara, hangi faiz oranıyla 60 günde 21304 denar faiz getirecektir? Zaman takvime göre ölçülüyor.

Verilenlere göre, K =1 620 000, i = 21 304 denar ve t = 60 gün. O halde $i = \frac{Kpd}{36500}$ olduğuna göre:

$p = \frac{36500 \cdot i}{Kt} = \frac{36500 \cdot 21304}{1620000 \cdot 60} = 8\%$ elde edilir. ◆

3. 23 mayıstan 16 temmuza kadar yatırılan bir miktar para %4 faiz oranıyla 4576 denar faiz getirdiğine göre, yatırılan anapara ne kadardır? Zaman takvime göre hesaplanır (k, 365).

Önce, yatırılan paranın bankada kaldığı zamanı hesaplamamız gerekir, yani gün sayısını saymalıyız. Bu durumda ilk günü sayarsak son günü hesaba katmıyoruz ya da ilk günü saymazsak son günü sayacağız, yani ilk ve son günden sadece birini hesaba katıyoruz.

Bu durumda faiz hesaplamanın ilk gününü 24 mayıs olarak alırsak, mayıs ayında 8 gün, 30 gün haziran, 31 gün temmuz ve ağustos, eylül ayında ise son günü hesaba katarak 16 gün vardır. Buna göre toplam gün sayısı $t = 8 + 30 + 31 + 31 + 16 = 116$ gün. O halde K için formülü kullanarak

$K = \frac{36500 \cdot i}{pt} = \frac{36500 \cdot 4576}{4 \cdot 116} = 360000$ denar olduğunu buluyoruz. Demek ki, 23 mayısta 360000 denar para yatırılmıştır. ◆

4. Bir masa tenisi yarışmasında turnuvayı kazanan yarışmacı kazandığı para ödülünü iki bankaya yatırıyor. Birinci banka %7, ikincisi ise %5 faiz oranıyla hesaplama yapıyor. Bir yıl sonra her iki bankadan toplam 7850 denar faiz elde edildiğine göre, yarışmacı her iki bankaya ayrı ayrı ne kadar para yatırmıştır?

Yatırılan anapara $K = 125000$ denar biliniyor. Bu para miktarı $K_1 = x$ ve $K_2 = 125000 - x$ olmak üzere iki bankaya yatırılmıştır. Faiz oranı $p_1 = \%7$, $p_2 = \%5$'tir ve toplam faiz miktarı $i = i_1 + i_2 = 7850$'dir. O halde verilen koşullara göre şu denklemi kurabiliriz:

$$i = \frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100},$$

burada $t_1 = t_2 = 1$ yıl. Buna göre,

$$7850 = \frac{7x}{100} + \frac{5(125000 - x)}{100},$$

denklemi elde edilir. Denklemi sadeleştirerek:

$$785000 = 5 \cdot 125000 + 2x,$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünden $K_1 = x = 80\,000$ denar ve $K_2 = 45\,000$ denar olduğunu buluyoruz.

Basit ve bileşik faiz hesaplama yoluyla elde edilen faiz miktarlarının farkını görmek için, bir örnekle karşılaştırma yapacağız. Ondan sonra, bileşik faizin hesaplanması için bir formül belirteceğiz.

5. 34 500 denar kapital bir bankaya %8 faiz ile dört yıl yatırılmış olan para basit ve bileşik faiz ile ne kadar faiz getirir?

Bir yılda 34 500 denar anapara basit faiz formülü ile

$\frac{8}{100} \cdot 34500 = 2760$ denar faiz getirir.

Faiz daima anaparaya hesaplandığına göre bu miktar hep aynıdır ve dört yılda 2760 denarın dört katı kadar faiz elde edilir. Buna göre toplam faiz miktarı:

$I_p = \frac{8}{100} \cdot 34500 \cdot 4 = 11040$ denardır.

Bileşik faiz hesabında ise her yıl sonunda elde edilen faiz miktarı anaparaya eklemekle anapara miktarı büyür ve gelecek yıl aynısı anapara oluyor. Buna göre, birinci yılın faiz miktarı $i_1 = \frac{8}{100} \cdot 34500 = 2760$ denardır. Halbuki artık ikinci yıl anaparası, birinci yılın anaparası ve birinci yılın faiz miktarıyla toplamına eşittir, 34 500 + 2 760 = 37 260 denardır.

İkinci yıl faiz miktarı $i_2 = \frac{8}{100} \cdot 37260 = 2980{,}8$ denar olur.

Üçüncü faiz miktarını hesaplamak için, anapara yine büyür ve 37260 + 2980,8 = 40240,8 denar olur. O halde $i_3 = \frac{8}{100} \cdot 40240{,}8 = 3219{,}264$ denar olur. Sonunda faizi hesaplanacak anapara 40240,8 + 3219,264 = 43460,064 olur. Buna göre $i_4 = \frac{8}{100} \cdot 43460{,}064 = 3476{,}8$ elde edilir. Dört yıl için elde edilen faiz miktarı 12436,86 denardır. Görüldüğü gibi, bileşik faiz hesabıyla hesaplanan faiz miktarı, basit faiz hesabıyla elde edilen miktardan büyüktür.◆

Bileşik faiz,yılda bir defa, iki defa ya da birçok defa hesaplanabilir. Faizin hesaplandığı zaman aralığına **faiz hesaplama vadesi** denir. Faiz yılda bir hesaplanarak yıl sonunda elde edilen faiz anaparaya eklenirse, o halde yıllık faiz söz konusu olur. Faiz yılda iki defa hesaplanarak ana paraya eklenirse, faiz hesaplama vadesi 6 aydır ve yarım yıllık faiz hesaplaması söz konusu olur. Benzer şekilde faiz hesaplama yılda dört defa yapılırsa faiz hesaplama vadesi 3 aydır denir.

Basit faiz hesaplamasında dört temel büyüklük:

- K - anapara (temel kapital başlangıç miktar)
- i - faiz miktarı
- p – faiz oranı (yüzde olarak), 100 denar paranın zaman biriminde getirdiği faiz.
- t - paranın faizde kaldığı süre – yıl olarak, ya da daha küçük zaman ölçü biriminde de olabilir.

Bu büyüklükler, bileşik faiz hesabının da temel unsurlarıdır, halbuki burada ek olarak bileşik faizin temel unsuru:

- bir yıl esnasında faizin hesaplanma sayısı *m,* yani yıllık dönem sayısı da katılmaktadır.

Pratikte, faiz dönemleriyle ilgili olarak faiz hesapları çeşitli işaretlerle işaretleniyorlar. Örneğin, faizin yıllık hesaplanması (*a*) ile, yarım yıllık hesaplanması (sömestreli) (*s*) ile, üç ayda bir hesaplamayı (kvartal) (*q*) ile, ayda bir vadeyi (*m*) ile ve adı geçen her vadelik hesaplamalarda faiz oranı yıl bazında sayılmaktadır.

Faiz oranı, yıllık faiz oranı gibi verildiğinde *p.a.* biçiminde işaret yazılır, yarım yıllık faiz oranı olarak alınırsa *p.s.* işareti yazılır. Üç aylık bazında da faiz oranı verilebilir ve bu durumda *p.q.* biçiminde ya da aylık bazında olursa *p.m.* işareti yazılır. Bu şekilde verilmiş olan faiz oranına **nominal faiz oranı** denir. Nominal faiz oranı, aslında baz kabul edilen faiz vadesinde yüz para biriminin büyüme miktarıdır.

Ancak finansman ya da yatırımlarla ilgili kararlarda vade uzunluğu yıl olduğu kadar yıldan daha kısa süreli olabilir. Örneğin tahvil faizlerinin her altı ayda bir ya da üç ayda bir ödenmesi; ya da aylık, üç aylık, altı aylık vadeli hesap açtırılmasında olduğu gibi. Bu gibi durumlarda yıllık olarak verilen faiz oranından **etkin faiz oranı (rölatif faiz oranı)** bulunarak işlem yapılmalıdır. Etkin faiz oranını, yıllık nominal faiz oranının (cari faiz ya da piyasa faiz oranı da denilen) yıl içindeki dönem sayısına bölünmesiyle bulunur.

Etkin faiz oranı, nominal faiz oranının bir kısmı gibi belirtilir. Örnek, nominal yıllık faiz oranı yıl bazında verilmiş iken altı ay vadeli bir hesap açtırılırsa, altı ay yılın yarısı olduğunu göz önünde bulundurarak etkin faiz oranı da nominal faiz oranının yarısı olacaktır. Nominal faiz oranı yıl bazında, faiz hesaplama vadesi aylık ise, etkin faiz oranı, nominal faiz oranının on ikide biri olacaktır. Benzer şekilde, nominal faiz oranı sömestreli (yarım yıllık) olduğunda, üç aylık faiz vadesi için etkin faiz oranı nominal faiz oranının yarısına eşittir, çünkü üç aylık dönem altı aylık faiz vadesinin yarısıdır. Nominal faiz oranı üç aylık, faiz hesaplama vadesi yıllık olduğu durumda, bir yıla karşılık gelen etkin faiz oranı verilenden dört kat büyüktür, çünkü yıl, üç ayın dört katıdır. Karşılaştırma yapmak için aşağıdaki tabloyu inceleyebilirsiniz. Orada $m = 2$, $m = 1$, $m = 4$, $m = 12$ ve benzer.

Faiz vadesi	Nominal faiz oranı	Etkin (rölatif) faiz oranı
Yarım yıllık (sömestral)	% 8 *p.a.*	% 4 *p.s.*
Yıllık	% 8 *p.a.*	% 16 *p.a.*
Üç aylı	% 8 *p.a.*	% 2 *p.q.*
Aylık	% 8 *p.a.*	% 0,667 *p.a.*
İki yıllık	% 8 *p.a.*	% 32
İki aylık	% 8 *p.a.*	% 1,333.

Her dönem sonunda faiz hesaplanarak anaparaya katılırsa **dönem sonu (dekurzif) faizlenme** söz konusu olur; böyle durumda faiz oranı *p.a.(d)* ile işaret edilir. Dönem sonu faizlenmenin faiz hesaplaması başlangıçta yatırılan anaparaya göre uygulanmaktadır.

Faizlenme her dönem başlangıcında yapılırsa, dönem başı faizin hesaplanması için temel değer, dönem sonunda elde edilen anaparadır; bu işleme **dönem başı (antisipatif) faizlenme** denir ve *p.a.(a)* ile işaret edilir.

İki şekilde verilmiş olan (dönem sonu ve dönem başı) faiz oranlarından hangisi daha kârlı olduğunu anlamak için, her ikisini aynı şekilde ifade etmemiz gerekir. Bu durumda, aynı anaparadan bir yılda aynı faiz miktarı, yani aynı birikim K_1 elde edilmesi önemlidir. Faizinin belirtilmesi istenilen temel değer (anapara) K verilmiş ve faiz oranları π%*p.a.(a)* ve *p% p.a.(d)* verilmiş olsun. Faiz hesaplama şeklinin tanımlarına göre dönem sonu faizlenmede hesaplanan anaparaya katılır ve yıl sonunda $K_1 = K\left(1+\frac{p}{100}\right) = K\frac{100+p}{100}$. değeri elde edilir. dönem başı faizlenmede, borçlu faiz miktarını π faiz oranıyla önceden ödemelidir. Bu demektir ki birinci dönem başlangıcında, hesaplanan faiz temel değerden çıkarıldığına göre *K* değerini değil $K = K_1 - K_1\frac{\pi}{100} = K_1\left(1-\frac{\pi}{100}\right)$ değerini çekebilir. Bu durumda anaparanın başlangıç değeri $K = K_1\left(1-\frac{\pi}{100}\right) = K_1\frac{100-\pi}{100}$'dir. Oradan $K_1 = K\frac{100}{100-\pi}$ olur. K_1'in son değerlerini eşitleyerek $K\frac{100+p}{100} = K\frac{100}{100-\pi}$, eşitliği, ya da $\frac{100+p}{100} = \frac{100}{100-\pi}$. denklemi elde edilir. π *p.a.(a)* faiz oranı belli olduğu durumda, dönem sonu faiz oranını $p = \frac{100\pi}{100-\pi}$, formülüyle hesaplayabiliriz. *p% p.a.(d)* belli olduğu durumda ise dönem başı faiz oranı $\pi = \frac{100p}{100+p}$ formülüyle hesaplanabilir.

6. Bir banka %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla, diğer bir rakip banka ise %5,7 *p.a.(a)* faiz oranıyla borç veriyorlar. Hangi bankanın faiz oranı daha uygundur?

Her iki faiz oranını karşılaştıracağız. Halbuki önce dönem sonu faiz oranını, dönem başı faiz oranına ve tersine dönüştürmemiz gerekir.

Dönem sonu faiz oranını, dönem başı faiz oranına dönüştürüyoruz. $\pi = \frac{100p}{100+p} = \frac{100 \cdot 6}{100+6} =$ %5,66 *p.a.(a)* elde edilir. Buna göre % 5,7 *p.a.(a)* faiz oranı veren banka daha hesaplıdır.

Buna inanmak için, ters dönüşümü de yapacağız. Dönem başı faizi dönem sonu faize dönüştürüyoruz $p = \frac{100\pi}{100-\pi} = \frac{100 \cdot 5{,}7}{100-5{,}7} =$ %6,04 *p.a.(d).* Buradan da görüldüğü gibi göre % 5,7 *p.a.(a)* faiz oranı daha hesaplıdır.◆

Alıştırmalar

1. 25 000 denar paradan % 15 faiz oranıyla basit faizde
a) 5 yılda b) 3 ayda c) 25 günde
(30,360) ve (*k,* 365) zaman matrislerine göre ne kadar faiz getirir?

2. Faiz oranı %5 basit faiz ile yatırılan bir temel kapital *K,* kaç yıl bankada yatırılmalıdır ki elde edilen faiz miktarı temel değere eşit olsun? (Not. $K = I$).

3. 34500 denar borç için basit faiz hesabına göre 4 yılda toplam 6900 denar faiz ödenmiştir. Faiz oranı ne kadardır?

4. Yatırılan hangi anaparaya %6 faiz oranıyla 3540 denar faiz miktarı ödenmiştir:
a) 4 yılda; b) 8 ayda?

5*. Bir bankaya, aralarındaki fark 12000 denar olan iki farklı kapital yatırılmıştır. Büyük olan para miktarı %4 faiz oranıyla bir yıl için küçük olan para miktarı ise %6 faiz oranıyla 10 ay vadeyle yatırılmıştır. Her iki kapitalin getirdiği faiz miktarı eşit olduğuna göre iki farklı kapitalin toplamını hesaplayınız.

6. Verilen %12 *p.a.* nominal yıllık faiz oranı için şunları belirtiniz:
a) yarım yıllık vadeli etkin (rölatif) faiz oranını;
b) üç aylık vadeli etkin faiz oranını;
c) aylık vadeli etkin faiz oranını;

7. Üç aylık nominal faiz oranı %2 *p.q.* verilmiş olduğu halde şunları belirtiniz:
a) yarım yıllık etkin faiz oranını;
b) yıllık etkin faiz oranını;
c) aylık etkin faiz oranını.

8. %10 dönem sonu faiz oranını, dönem başı faiz oranına dönüştürünüz.

9. %10 dönem başı faiz oranını, dönem sonu faiz oranına dönüştürünüz.

10*. Hangi faiz oranı daha kazançlıdır %6 *p.a.(a)* yoksa %6,5 *p.a.(d).*

2.2. Temel Değerin Gelecekteki Değerini Hesaplamak

Bileşik faiz hesaplamalarını yaparken, faiz oranından başka, temel paranın faiz vadesi sonunda faiz miktarı kadar büyümüş değerini de bilmek gerekir, yani faizlenen değer ya da *i / i*. Bu durumda, tüm faiz vadesinde elde edilen faiz miktarını temel değere katmakla, elde edilen para miktarına, temel paranın **gelecekteki değeri** denir. Faizlenmesi yapılan temel değerin başlangıç miktarına **şimdiki değer** de denir.

Başlangıçta dönem sonu faiz oranıyla işlem gören K para miktarını inceleyelim.

K_1, K_2,….. K_n, sırasıyla birinci yıl sonunda, ikinci yıl sonunda, …*n*. yıl sonunda elde edilen kapital olsun. Bu değerler bir geometrik dizinin oluşturduğunu göstereceğiz. Bu temel değerin yıllık %*p p.a.(d)* faiz oranıyla *n* yılda nasıl değiştiğini inceleyeceğiz. Hesaplanan her faiz miktarı dönem sonunda anaparaya katıldığını ve ilerdeki dönemde büyüyen anapara temel kapital olarak alındığını hatırlatalım. Dönem sonunda kapitalin değeri birinci yıl sonunda

$$K_1 = K + \frac{Kp}{100} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right), \text{ olur.}$$

ikinci yıl sonunda $K_2 = K_1 + \dfrac{K_1 p}{100} = K_1\left(1 + \dfrac{p}{100}\right) = K\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^2$,

----

Aynı şekilde devam edersek n. yıl sonunda

$$K_n = K_{n-1} + \frac{K_{n-1} p}{100} = K_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \text{ elde edilir.}$$

Burada iki ardışık değeri K_{s-1} ve K_s ayırırsak, *s* yıl sonunda temel kapitalin toplam değeri, ondan önce gelen K_{s-1} değerine hesaplanan faizin katılmasıyla K_s miktarı elde edilir, yani

$$K_s = K_{s-1} + K_{s-1} \cdot \frac{p}{100} = K_{s-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ olur.}$$

Buna göre, herhangi iki ardışık temel miktarın oranı, yani iki ardışık dönem sonundaki miktarların oranı:

$$\frac{K_s}{K_{s-1}} = 1 + \frac{p}{100} \text{ olur.}$$

Açıktır ki, K, K_1, K_2,... K_n değerleri ortak çarpanı $1 + \frac{p}{100}$ olan bir geometrik dizi oluşturuyorlar. Bu durumda verilen koşullara göre kapitalin son değeri için:

$$\boxed{K_n = K(1 + \frac{p}{100})^n}.$$

formülü elde edilir.

Bu formülü yukarıda adı geçen parametrelerle genişleteceğiz. Bunlar bir yılda faiz dönem sayısı m, etkin faiz oranı daha doğrusu $\frac{p}{m}$, burada p dönem sonu faiz oranıdır ve faizlenme devrelerinin tümü nm'dir. Faiz vadelerinin tümü, aslında faizin hesaplandığı yıl sayısı ve faiz vade sayısının çarpımıdır.

Bu koşullarla, yani bir yılda faiz dönem sayısı m olduğunda anaparanın gelecekteki değeri için

$$\boxed{K_n = K(1 + \frac{p}{100m})^{nm}}$$

formülü elde edilir.

$r = 1 + \frac{p}{100m}$, çarpanına dönem sonu faiz katsayısı denir. Bu katsayıyı anaparanın gelecekteki değer formülünde değiştirirsek

$$\boxed{K_n = Kr^{nm}}$$

formülü elde edilir.

Not 1. Anaparanın gelecekteki değerini daha kolay biçimde hesaplamak için, *i* / *i* şeklinde işaret ettiğimiz faizin faizine ait özel tablolar geliştirilmiştir. Orada, verilen faiz oranı için en çok kullanılan parametreler önceden hesaplanmış olduğuna göre hazır değerler gibi kullanılabiliyorlar. Örnek, ilk *i* / *i* tablolarda faiz katsayısının değerlerini, yani bir para biriminin son değerinin dönem sonu faiz katsayısıyla çarpımını göstermektedir. Orada r^n değeri I_p^n ile işaret edilmiştir ve anaparanın gelecekteki değerini, yılda bir faizin hesaplanmasıyla, n yılda faiz oranı %p *p.a.(d)* olduğunda

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_p^n},$$

formülü elde edilir.

Faizlenme yılda birçok defa yapılırsa, formül

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm}},$$

şeklini alır. Burada yıl sayısı faiz vadesi sayısıyla çarpılır, faiz oranı ise vade sayısıyla bölünür. Vade sayısı m ile işaretlenmiştir, yani yılda kaç defa faizlenme yapıldığını gösteren sayı olarak gösterilir.

1. 25 000 denar para 20 yılda %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla, faiz hesaplaması yıllık vadeli, yarım yıllık vadeli ve üç aylık vadeli olduğuna göre paranın gelecekteki değerini hesaplayınız.

Verilenler: $K = 25\ 000$, $n = 20$, $p = 8\%$ *p.a.(d)*.

a) Faiz hesaplaması yıllık vadeli olduğuna göre $m = 1$'dir. Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$'dir.

Açıktır ki, $K_{20} = Kr^{20} = 25000 \cdot 1{,}08^{20} = 116523{,}93$ denar olacaktır.

b) $m = 2$ olsun, yani faiz hesaplaması yarım yıllık vadeli olsun. Dönem sonu katsayı $r = 1 + \frac{8}{100 \cdot 2} = 1{,}04$, anapara ise $K_{20} = Kr^{40} = 25000 \cdot 1{,}04^{40} = 120025{,}52$ denar olur. Bu ise yıllık faiz hesaplamasından fazla olduğu görülüyor.

c) $m = 4$ olsun, yani faiz hesaplaması üç ayda bir vadeli yapılmış olsun. Dönem sonu katsayı $r = 1 + \frac{8}{100 \cdot 4} = 1{,}02$, anapara ise $K_{20} = Kr^{80} = 25000 \cdot 1{,}02^{80} = 121885{,}98$ denar olur.◆

Dönem sonu faiz hesaplamasında faiz devrelerinin artmasıyla anaparanın (yatırımın) da gelecekteki değeri artar. Yani, faizin hesaplanması ne kadar daha sık yapılırsa r^{nm} değeri de o kadar artar, bununla yatırımın gelecekteki değeri de artar.

Nominal faiz oranı bir yıldan az vade için verildiğinde, yıllık faiz oranıyla ne olduğunu incelersek, bu durumda yıllık faiz oranı etkin faiz oranı rolünü alacaktır. $p = \%8$ *p.s.(d)* ise, bu faiz oranı sadece yarım yıl için geçerli olduğunu göz önünde bulundurarak yıllık etkin faiz oranı %16 olur. $p = \%\ 8$ *p.q.(d)* üç aylık vadeli faiz oranı ise, etkin yıllık faiz oranı % 32 olur.

2. Başlangıç değeri 25 000 denar olan bir kapitalin, p = %8 *p.m.(d)* faiz oranıyla, faiz vadesi yılda dört defa yani üç aylık faizin hesaplanmasıyla 5 yıl sonra gelecekteki değeri belirtilsin.

Önce yıllık etkin faiz oranını belirtmek gerekir, bu ise yıllık 8 · 12 = %96 'dır. Halbuki, faiz vadesi yılın dörtte biri olduğundan üç aylık vadeli faiz oranı $\frac{96}{4} = \%24$ olur. Bir aylık vade, üç ayda kaç defa geldiğini düşünürsek aynı sonuca varabiliriz. Bir çeyrek yıl üç ay olduğundan 3 · 8 = 24% elde edilir. faizlenme işleminin toplam vade sayısı nm = 5. 4 = 20'dir. Anaparanın gelecekteki değeri:

$$K_5 = 25000 \cdot \left(1 + \frac{12 \cdot 8}{4 \cdot 100}\right)^{5 \cdot 4} = 25000 \cdot \left(1 + \frac{24}{100}\right)^{20} = 25000 \cdot 1{,}24^{20} = 25000 \cdot 73{,}864\,.$$

olduğuna göre, K_5 = 1846603,74 denar olduğunu buluyoruz. ◆

Sıradaki örnekte, bir anaparanın gelecekteki değerini hesaplarken, bileşik faiz hesabının uygulanması ya da basit ve bileşik faiz karması kullanılmakla elde edilen farkı göreceğiz.

3. 15.09 günü 18 000 denar yatırılmıştır. Faiz oranı p = %6 *p.s.(d),* faiz hesaplanması üç aylık vadelerle yılın 30.09, 30.12, 30.03 ve 30.06 günlerinde yapıldığında zaman matrisi (30, 360) koşuluyla, onuncu yılın 28.07 günü (ilk günü dahil) yatırımın değeri ne kadar olacaktır?

Yatırımın şimdiki değeri K = 18 000, faiz vadesi çeyrek yıl, yani m = 4, faiz oranı p = %6 *p.s.(d)*, yıllık rölatif faiz oranı %12 *p.a.(d)* parametreleri verilmiştir.

Karşılık gelen faiz katsayısının değeri $r = 1 + \frac{2p}{100m} = 1 + \frac{6 \cdot 2}{100 \cdot 4} = 1{,}03$'tür.

Yatırımın faizde kalma zamanını belirtmemiz gerekir. Yatırımın yapıldığı gün 15.09'den faizin ilk hesaplama gününe kadar sadece 15 gün vardır. Bu günleri verilen zaman matrisine göre yıl olarak ifade edersek $t' = \frac{15}{360}$ yıl olur. Ondan sonra 30.12 tarihine kadar, yani yılın sonuna kadar bir faiz devresi vardır. İkinci yılın başlangıcından dokuzuncu yılın sonuna kadar toplam 8 yıl olduğuna göre toplam 32 faiz vadesi vardır. Onuncu yıl boyunca 30.06 tarihine kadar 2 tam vade ve yatırımın kaldırılacağı güne kadar daha 28 gün vardır. Demek ki toplam 35 tam faiz vadesi ve ilk yılın $t' = \frac{15}{360}$ ve onuncu yılın t" = 28 gün $= \frac{28}{360}$ yıl faiz zamanı elde edilir.

Yatırımın gelecekteki değerini sadece bileşik faiz hesabını kullanarak hesaplıyorsak, zamanı tam vade sayısına, kalan günleri ise yıl olarak ifade edeceğiz. Buna göre:

$$K_n = Kr^{35} \cdot r^{t'm} \cdot r^{t''m} = 18000 \cdot 1{,}03^{35} \cdot 1{,}03^{\frac{15}{360}4} \cdot 1{,}03^{\frac{28}{360}4} = 51369{,}9$$

denar elde edilir.

Zamanın tamamını yıllarla ifade edersek, tam vadeler 3 aylık yani 90 gün olduğunu göz önüne bulundurarak $\dfrac{35 \cdot 90}{360}$ yıl olur. O halde $K_n = 18000 \cdot 1{,}03^{\frac{3193}{360}4} = 51369{,}9$ denar olduğunu buluyoruz.

Faizde kalma zamanının sadece tam vadelerine basit faiz hesabını uygulayarak, bileşik ve basit faiz hesaplama kombinasyonu kullanalım:

$$K_n = K(1+\frac{p}{100}t') \cdot r^{35} \cdot (1+\frac{p}{100}t''),$$

formülünde, sırasıyla önce ilk yılın 15 günü, ondan sonra 35 tam faiz vadesi ve sonunda son yılın 28 günü yazılarak

$$K_n = 18000 \cdot (1+\frac{12}{100}\frac{15}{360}) \cdot 1{,}03^{35} \cdot (1+\frac{12}{100}\frac{28}{360}) = 51377{,}86$$

denar elde edilir.◆

Demek ki, basit ve bileşik faiz kombinasyonunu uygulayarak yatırımın gelecekteki değeri, sadece bileşik faiz hesabı kullanarak elde edilen miktardan biraz farklaşıyorlar ve kombinasyon uygulayarak elde edilen gelecek değer biraz büyüktür.

Dönem sonu (sonra) ve dönem başı (peşin) faizlenme arasındaki temel fark, konunun başlangıcında ifade edildiği gibi, dönem sonu faizlenmede faiz miktarı dönem sonunda anaparaya eklenir, dönem başı faizlenmede ise faiz miktarı anaparaya peşin eklenir.

Dönem başı faizde borçlu, π faiz oranıyla K kapitaline gereken faiz miktarını peşin ödeme yükümlülüğünü kabul etmiştir. $K_1, K_2, \ldots, K_n$ birinci, ikinci ve benzer şekilde n- yıl sonunda kapitalin değerleri olsun.

Birinci vadesin başlangıcında borçlu K değerini değil $K = K_1 - K_1\dfrac{\pi}{100} = K_1\left(1-\dfrac{\pi}{100}\right) = K_1\dfrac{100-\pi}{100}$ değerini alabilecektir. O halde birinci yıl sonunda borçlunun yıllık (m = 1) faizlenme ile ödeyeceği miktar

$$K_1 = \frac{K}{1-\frac{\pi}{100}} = K\frac{100}{100-\pi}.$$

elde edilir.

İkinci yıl sonunda, bileşik faiz hesaplandığına göre, faiz tabanı birinci yıl sonunda elde edilen miktardır, yani şimdi $K\dfrac{100}{100-\pi}$ dir. Demek ki, ikinci yıl sonunda

$$K_2 = K_1\frac{100}{100-\pi} = K\left(\frac{100}{100-\pi}\right)^2.$$

miktar ödenmelidir. Bu şekilde devam ederek faizlenmenin son n–ci yılına geliyoruz ve anaparanın gelecekteki değeri

$$K_n = K_{n-1}\frac{100}{100-\pi} = K\left(\frac{100}{100-\pi}\right)^n.$$

olur. dönem başı faizlenmede kapitalin son değerleri K, K_1, K_2, ….ortak böleni $\rho = \dfrac{100}{100-\pi}$ olan bir geometrik dizi oluşturuyorlar. n- ci dönem sonunda kapitalin değeri K_n ise, $K_n = K_{n-1}\,p$, geçerlidir, yani dönem başı faizlenmede n yıl sonra kapitalin değeri $\boxed{K_n = K\rho^n}$. olur.

$$\rho = \frac{1}{1-\dfrac{\pi}{100}} = \frac{100}{100-\pi}$$ katsayısına dönem başı faiz katsayısı denir.

Elde edilen formülleri, bir yılda faiz dönem sayısı m, etkin faiz oranı (rölatif faiz oranı) $\frac{\pi}{m}$; burada π yıllık dönem başı faiz oranıdır ve faiz süresinin toplam sayısı nm parametreleriyle genişlettirirsek, kapitalin gelecekteki değeri için şu formülü elde edeceğiz:

$$K_n = K\left(\frac{100}{100-\dfrac{\pi}{m}}\right)^{nm} = K\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right)^{nm}.$$

Formülde dönem başı faiz oranının katsayısı $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi}$. koyarsak, kapitalin gelecekteki değerine ait

$$\boxed{K_n = K\rho^{nm}},$$

formülü elde edilir.

Not 2. i / i tablolarında dönem sonu hesaplamada olduğu gibi ρ^n değeri I_π^n ile işaret edilir ve yıllık faizlenmeyle şimdiki değerin (anaparanın) gelecekteki değerini hesaplamak için şu formül elde edilir:

$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\pi}^{n}}$,

Buna karşılık, faizin hesaplanması yılda birkaç kez yapıldığında yukarıdaki formül

$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{\pi}{m}}^{nm}}$,

şekline dönüşür. Bu durumda zaman faiz devreleriyle çarpılır, faiz oranı ise faiz dönem sayısıyla bölünür.

Son formüller dönem sonu faizlenme formülüyle aynıdır, halbuki farklı faiz katsayılarından ötürü elde edilen son değerler birbirinden farklıdır.

4. Şimdiki değeri 25 000 denar olan kapitalin, 20 yılda %8 *p.a.(a)* nominal faiz oranıyla, yıllık, yarım yıllık ve üç aylık faiz devreleriyle elde edilecek sonraki değeri ne kadardır?

Ödevdeki verilere göre K = 25 000, p = %8 *p.a.(a)* verilmiştir.

a) Yıllık faiz devresi $m = 1$ olsun. Önce dönem başı faiz katsayısını hesaplıyoruz: $\rho = \dfrac{100}{100-8} = 1{,}08696$.

Kapitalin gelecekteki değeri $K_{20} = Kp^{20} = 25000 \cdot 1{,}08696^{20} = 132498{,}59$ elde edilir.

b) $m = 2$ olsun, yani faizin hesaplanması yılda iki defa yapıldığını alalım.

Peşin faiz katsayısı $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi} = \dfrac{200}{192} = 1{,}04166667$, olduğunu buluyoruz. Buna göre kapitalin gelecekteki değeri $K_{20} = {}^{40} = 25000 \cdot 1{,}04166667^{40} = = 127964{,}85$ denar olduğunu buluyoruz. Görüldüğü gibi, yıllık faizlenmeyle elde edilen gelecekteki değer göre, yarım yıllık faizlenme ile elde edilen gelecekteki değer biraz azalmıştır.

c) $m = 4$ olsun, yani faizin hesaplanması her üç ayda yani yılda 4 defa yapıldığını alalım.

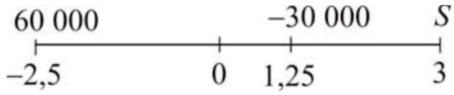
Peşin faiz katsayısı $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi} = \dfrac{400}{392} = 1{,}020408$, olduğunu buluyoruz. Buna göre kapitalin gelecekteki değeri $K_{20} = {}^{80} = 25000 \cdot 1{,}020408^{80} = 125848{,}6$ denar olduğunu buluyoruz.◆

Peşin faiz hesaplanmasında, faiz devrelerinin artmasıyla kapitalin gelecekteki değeri azalmaktadır.

Dönem sonu ve peşin faizin hesaplanmasıyla elde edilen gelecekteki değerleri birbiriyle karşılaştırırsak aynı koşullar altında dönem başı faizlenme ile dönem sonu faizlenmeden daha büyük değer verir. Buna göre borç kredi alındığında alacaklıya dönem başı faiz hesaplaması daha hesaplıdır, borçluya ise dönem sonu faiz hesaplaması daha kârlıdır.

5. 2 yıl ve 6 ay önce bankaya 60000 denar yatırmış ve bir yıl ve 3 ay sonra 45000 denar çekmemiz gerekir. Faiz oranı %6 *p.a.(d)*, faiz hesaplaması 3 aylık devrelerle yapıldığında bu günden 3 yıl sonra yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadar olacaktır? Aynı koşullar altında fakat dönem başı faizlenme ile paranın gelecekteki değeri ne kadar olacaktır?

Her miktarın ayrı ayrı gelecekteki değerini hesaplayacağız. Yatırılan miktar için faiz süresi 5,5 yıl, çekilen miktar için faiz süresi bir yıl ve 3 ay ve bu günden sonra 3 yıl sonraki toplam zaman süresi 1 yıl 9 aydır ya da 21 ay'dır (şek. 1).



Şek.1

Dönem sonu faiz katsayısından $r = 1 + \dfrac{6}{4 \cdot 100} = 1{,}015$, yararlanarak miktarın 3 yıl sonra gelecekteki değeri

$$S = 60000 \cdot r^{5,5 \cdot 4} - 45000 \cdot r^{4 \cdot \frac{21}{12}} = 60000 \cdot 1{,}015^{22} - 45000 \cdot 1{,}015^{7} = 33310{,}8$$

denar olduğunu buluyoruz.

Peşin faiz hesaplanmasıyla faiz katsayısı $\rho = \dfrac{100}{100 - \dfrac{6}{4}} = \dfrac{400}{400 - 6} = 1{,}015228$ dir. Bu durumda miktarın gelecekteki değeri

$$S = 60000 \cdot \rho^{5,5 \cdot 4} - 45000 \cdot \rho^{4 \cdot \frac{21}{12}} = 60000 \cdot 1{,}015228^{22} - 45000 \cdot 1{,}015228^{7},$$

elde edilir, yani S = 33644,62 denar olduğunu buluyoruz.◆

Alıştırmalar

1. 18 yıl 8 ay ve 20 gün evvel % 8 *p.a.(d)* faiz oranıyla 20 000 denar yatırılmıştır:

a) faiz devresi yıllık; b) faiz devresi üç aylık

olduğuna göre, yatırılan paranın bugünkü değeri ne kadardır? Hesaplamaları önce bileşik faiz hesabıyla, sonra bileşik faiz ve basit faiz kombinasyonuyla hesaplayınız.

2. 9000 denar ilk 5 yılda % 6*p.a.(d)* faiz oranıyla ve yarım yıllık faiz devresiyle, ondan sonra daha 4 yıl %8 *p.q.(d)* faiz oranıyla ve aylık faiz devresiyle ve sonunda daha 2 yıl, %7 *p.s.(d)* faiz oranıyla ve üç aylık faiz devresiyle bir bankaya yatırılmıştır. Yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadardır?

3*. 9000 denar ilk 5 yılda %6 *p.a.(a)* faiz oranıyla ve yarım yıllık faiz devresiyle, ondan sonra daha 4 yıl %8 *p.q.(a)* faiz oranıyla ve aylık faiz devresiyle ve sonunda daha 2 yıl, %7 *p.s.(a)* faiz oranıyla ve üç aylık faiz devresiyle bir bankaya yatırılmıştır. Yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadardır?

4. 2 yıl 3 ay önce 40 000 denar ve bugün daha 24 000 denar bankaya yatırılmıştır. Faiz oranı % 5 *p.a.(d)* ve yarım yıllık devrelerde faizin hesaplanmasıyla bu günden dördüncü yılın sonuna kadar yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadardır?

5*. Bugün 30 000 denar bankaya yatırıyoruz, üç yıl sonra ise 12 000 denar çekecek ve beş yıl sonra daha 20 000 denar yatırılacaktır. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve faiz hesaplanması üç aylık olduğuna göre bu günden 8 yıl sonra bankada ne kadar paramız olacaktır? Faiz oranı %6 *p.a.(a)* uygulandığı durumda elde edilen gelecekteki değeri ilki ile kıyaslayınız.

6*. Dört yıl önce 30 000 denar ve bugün daha 9 000 denar bankaya yatırılmış, iki yıl sonra 36 000 denar çekilecektir. Yatırımlara %6 *p.a.(d)* faiz oranı ve yarım yıllık devrelerde faizin hesaplanması uygulanmaktadır. Bu günden sekiz yılın sonuna kadar yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadardır?

7*. 15 yıl önce 7 000 denar, 9 yıl önce daha 4 000 denar bankaya yatırılmış ve 5 yıl önce hesaptan 5 000 denar çekilmiştir. Faiz işlemi üç aylık devrelerle %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla yapıldığına göre paranın bugünkü değeri ne kadar olacaktır?

2.3. Konform Faiz Hesabı

Dönem sonu yani faizin dönem sonu hesaplanması söz konusu olunca, pratik nedenlerden dolayı, şimdiye dek kullandığımız faiz oranlarından farklı bir cins faiz oranına ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun sebebi, bir yılda faiz devrelerinin artmasıyla faiz miktarının artışının sonucu olarak dönem sonu faizlenmede, kapitalin değeri de artar ve bazı anlaşmazlıklara sebep olabilir. Etkin faiz oranını uygulamakla sadece ana değerin faizi değil, faizin de faizi hesaplanmaktadır. Bu durumda temel değerin yıllık faizlenme ile ve yılda birkaç defa faizlenme ile elde edilecek gelecekteki değerler arasında fark ortaya çıkmaktadır. Bu farkı ortadan kaldırmak istersek, etkin faiz oranı yerine **konform faiz oranı** denilen faiz oranını uygulayacağız. Bu faiz oranıyla, faiz ister yıllık hesaplamayla, ister yılda birkaç devreden faizin hesaplanmasıyla aynı faiz miktarı elde edilir. Konform faiz oranını $p_{k,m}$ ile işaret edeceğiz. Bir yılda m defa faizlenme ile ve yılda bir defa faiz oranı p olmak üzere yapılan faizlenme ile aynı faiz miktarı veren **konform faiz oranı** şu formüllerin eşitlenmesiyle elde edilir:

$$K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^m = K\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

oradan da $$\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^m = \left(1+\frac{p}{100}\right)$$

elde edilir. Bu denklemden konform faiz oranı için şu formül elde edilir:

$$\boxed{p_{k,m} = 100\cdot\left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right)}.$$

Elde edilen konform faiz oranı, daima etkin faiz oranından küçüktür.

1. Yıllık nominal faiz oranı p = %12 *p.a.(d)* olduğuna göre, üç aylık konform faiz oranı ne kadardır? Elde edilen faiz oranını, etkin faiz oranıyla (rölatif faiz oranıyla) karşılaştırınız. Ondan sonra 10000 denar anaparanın her iki faiz oranıyla bir yıl sonunda gelecekteki değerlerini hesaplayarak karşılaştırınız.

Faiz dönem sayısı m = 4'tür. Yukarıda elde edilen formülden

$p_{k,4} = 100\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{12}{100}}-1\right) =$ %2,87 elde edilir. Diğer taraftan üç aylık etkin faiz oranı $\frac{12}{4} = \%3$,

olduğunu buluyoruz. Görüldüğü gibi, etkin faiz oranı konform faiz oranından büyüktür. Konform faiz oranını verilen anaparaya uygulayarak gelecekteki değeri

$K_1 = 10000\cdot\left(1+\frac{2{,}87}{100}\right)^4 = 11198{,}37$ denar elde edilir. Etkin faiz oranını uygulamakla

$K_1' = 10000\cdot\left(1+\frac{12}{4\cdot 100}\right)^4 = 11255$ denar elde edilir.◆

2. 25000 denar, 20 yılda, nominal faiz oranı %8 *p.a.(d)*, faizlenme yarım yıllık ve üç aylık olmak üzere, konform faiz oranını kullanıldığında anaparanın gelecekteki değerini hesaplayınız.

a) m = 2 olsun. Yılda iki faizlenmeye karşılık gelen konform faiz oranı $p_{k,m} = 100\left(\sqrt{1+\frac{8}{100}}-1\right) = 3{,}923\%$dir. Anaparanın gelecekteki değeri için, $K_{20} = K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^{40} =$

$= 25000\cdot 1{,}03923^{40} = 116521{,}755$ elde edilir. Bu şekilde elde edilen kapital, rölatif faiz oranıyla yapılan hesaplamaya göre elde edilen kapitalden küçüktür, halbuki yıllık faizlenme ile elde edilen kapital ile hemen de aynı olduğunu görebiliriz.

Örnek, etkin faiz oranını uygulayarak $K_{20}'=25000\cdot\left(1+\dfrac{8}{2\cdot 100}\right)^{40}=120025,52$ denar, yıllık faizlenme ile $K_{20}''=25000\cdot\left(1+\dfrac{8}{100}\right)^{20}=116523,93$ denar elde edilir.

b) $m = 4$ olsun. Konform faiz oranı $p_{k,m}=100\left(\sqrt[4]{1+\dfrac{8}{100}}-1\right)=1,943\%$. Konform faiz oranıyla kapitalin gelecekteki değeri $K_{20}=K\left(1+\dfrac{p_{k,m}}{100}\right)^{20\cdot 4}=25000\cdot 1,01943^{80}=116555,51$ denardır. Etkin faiz oranını kullanmakla $K_{20}'=K\left(1+\dfrac{8}{4\cdot 100}\right)^{80}=25000\cdot 1,02^{80}=121885,98$ denar elde edilir. Yılda bir faizlenme işlemi yaparak K_{20}'' = 2116523,93 denar elde edilir. ◆

Yıllık faizlenme ile ve dönem faizlenme ile yapılan işlemlerde kapitalin gelecekteki değeriyle ilgili meydana gelen sapmalar, Konform faiz oranında yapılan yuvarlamadan kaynaklanır.

Alıştırmalar

1. Bugün yatırılan 28000 denar %2 *p.q.(d)* faiz oranıyla, yarım yıllık dönem faizlenme işlemi uygulayarak 2 yıl 9 ay sonra hangi değere bağlı olacaktır? Konform faiz oranını uygulayınız.

2. Bugün 10000 denar yatırıp, iki yıl sonra 7500 denar çekilecektir. Faiz oranı %9 *p.s.(d)*, dönem vadesi 3 ay olmak üzere, bu günden üç yıl sonra ne kadar paramız olacaktır? Konform faiz oranı uygulanmalıdır.

3. Bankaya 20 000 denar: a) etkin faiz oranı; b) konform faiz oranı

%8 *p.a.(d)* ve faiz hesaplama vadesi 3 ay olmak koşullarıyla para yatırdık. 10 yıl sonra ne kadar paramız olacaktır?

4. Üç aylık faiz vadesine ait %1,467 konform faiz oranını yıllık faiz oranına dönüştürünüz.

5. %8 *p.a.(d)* faiz oranını veriliyor. Yarım yıllık ve üç aylık faiz vadesine karşılık gelecek konform faiz oranını hesaplayınız.

6*. 15 yıl önce bankaya 7000 denar, 9 yıl önce daha 4000 denar yatırılmış, 5 yıl önce ise hesaptan 5000 denar çekilmiştir. Faizin hesaplanması 3 aylık vadelerle ve %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla yapıldığına göre, hesabımızda bugüne kadar ne kadar para birikmiştir. Konform faiz oranını hesaplayınız.

2.4. Yatırılan Paranın Başlangıç Değeri ve Faiz Miktarının Hesaplanması

Bazı durumlarda, belli bir zamanda, belli faizlenme oranıyla ne kadar paraya ihtiyacımız olacağını biliyor, fakat bunun için bankada ne kadar paranın yatırılması gerektiğini bilmiyoruz. Aslında, faiz oranını, yıl içindeki faiz dönem sayısını *m* ve faiz zamanı *n* ile biriken K_n değeri bilindiğine göre, *K* başlangıç miktarını, yani anaparayı hesaplamamız gerekir. Verilen kapitalin gelecekteki değerini hesaplamak için elde ettiğimiz formülden, temel değer için şu formülleri belirtebiliriz:

$$K = K_n r^{-nm} = \frac{K_n}{(1+\frac{p}{100m})^{nm}},$$ dönem sonu faizlenme için ve

$$K = K_n \rho^{-nm} = K_n\left(1-\frac{\pi}{100m}\right)^{nm},$$ dönem başı faizlenme için.

Biriken paranın başlangıç değerini bulma işlemine, **iskontolama** ya da biriken değerin başlangıç değerini belirtme denir. Faiz oranlarının çarpımsal ters r^{-nm} ve ρ^{-nm} değerlerine **iskonto katsayıları (faktörleri)** denir.

Not 1. Burada önemli olan *i / i* tablolarından yararlandığımızda neler oluyor bilmemiz gerekir. Dönem sonu ve dönem başı faizlenmenin katsayıları na karşılık gelen I^n_ρ ve I^n_π değerler yanı sıra, değerleri ikinci tabloda okunan $\mathrm{II}^n_p = \frac{1}{\mathrm{I}^n_p} = r^{-n}$ ve $\mathrm{II}^n_\pi = \frac{1}{\mathrm{I}^n_\pi} = \rho^{-n}$, iskonto katsayıları da belirtilir. İkinci tablolardaki değerler, birinci tablolardaki değerlerin çarpımsal tersleridir. Buna göre temel değerin başlangıç değerini belirtmek için formüller

$$\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}^n_p},$$

yıllık dönem sonu faizlenme için ve

$$\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}^n_p},$$

yıllık dönem başı faizlenme için şeklinde yazabiliriz.

Tabi ki, yılda birkaç defa faizlenme yapılıyorsa zaman süresi faiz dönem sayısıyla çarpılır, faiz oranı ise yıl içindeki faiz dönem sayısıyla bölünür. Buna göre başlangıçtaki temel değer $\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_{\frac{p}{m}}^{nm}}$, dönem sonu faizlenme için ve $\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_{\frac{\pi}{m}}^{nm}}$, dönem başı faizlenme için formülleriyle hesaplanabilir.

1. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve yıllık faiz vadesiyle dört yılda 68000 denar biriktirmemiz gerekirse, bankaya ne kadar para yatırmamız gerekir?

Burada $m = 4, K_4 = 68\,000, p = \%6\, p.a.(d)$ olduğu açıktır. Önce faiz katsayısını ondan sonra iskonto katsayısını hesaplayalım, $r = 1 + \dfrac{6}{100} = 1{,}06$. Buna karşılık iskonto katsayısı $\dfrac{1}{r} = 0{,}9434$ elde edilir. O halde başlangıç (yatırılması gereken) kapital $K = \dfrac{68000}{1{,}06^4} = 68000 \cdot 0{,}9434^4 = 53862{,}3$ denar olduğunu buluyoruz.◆

2. Hangi temel değer dört yılda dönem süresi:

a) yarım yıl; b) üç ay

olmak üzere yatırmalıyız ki, gelecekteki değeri 10000 denar olsun?

Temel değerin gelecekteki değeri K_4 = 10000 denardır. Her iki durumu ayrı ayrı inceleyeceğiz.

a) $m = 2, r = 1 + \dfrac{8}{200} = 1{,}04$, demek ki $K = 10000 \cdot 1{,}04^{-4\cdot 2} = 7306{,}9$ denardır;

b) $m = 4, r = 1 + \dfrac{8}{400} = 1{,}02$, oradan $K = 10000 \cdot 1{,}02^{-4\cdot 4} = 7284{,}46$ denar elde edilir.◆

3. Üç yılda, aylık vadeli %6 *p.a.(a)* faiz oranıyla 14300 denar olan paranın başlangıç değerini belirtiniz.

Söz konusudur: bir yılda m =12 faiz hesaplanması, kapitalin son değeri K_3 = 14300, ve faiz oranı π = %6 *p.a.(a)* dönem başı faizlenmedir.

Kapitalin başlangıç değeri formülünden,

$$K = K_3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{12 \cdot 100}\right)^{36} = 14300 \cdot \left(1 - \frac{6}{1200}\right)^{36} = 14300 \cdot 0{,}995^{36} = 11938{,}97$$

denar elde edilir.◆

4. Altı yıl önce 27000 denar borç alınmış, on yıl sonra ise daha 36000 denar borcun ödenmesi gerekir. Önceki borcumuzu ödeme imkânı olmadığını varsayarak %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve yarım yıllık faizlenme ile bugün tüm borcu birden ödemek istersek, hangi miktar parayı ödemeliyiz? Aynı koşullarla fakat faizlenme dönem başı (peşin) olmak üzere hangi miktar parayı ödemeliyiz?

Borcu geriye çevirmediğimiz takdirde, onun değeri bugüne dek, faiz dönem sayısı 12 ve %2 *p.s.(d)* etkin faiz oranıyla elde edilecek faiz miktarı kadar artmıştır. Demek ki, ödenmemiş borç bugün:

$27000 \cdot \left(1+\frac{4}{200}\right)^{12} = 27000 \cdot 1{,}02^{12}$. olacaktır. Aynı zamanda ikinci boru süresinden önce ödediğimize göre, değeri 10 yıl için geri iskontolanacaktır ve

$36000 \cdot \left(1+\frac{4}{200}\right)^{-20} = 36000 \cdot 1{,}02^{-20}$ olacaktır (şek.2).

Şek.2

Bu günün toplam borcu, hesaplanan her iki borcun toplamıdır. Buna göre, tüm borcu bugün ödersek aranılan miktar:

$S = 27000 \cdot 1{,}02^{12} + 36000 \cdot 1{,}02^{-20} = 58469{,}5$ denardır.

Faizlenme dönem başı yapıldığı durumda, faiz katsayısı $\rho = \frac{100}{100-2} = 1{,}020408$ denar olur.

Buna göre gereken para miktarı: $S = 27000 \cdot 1{,}020408^{12} + 36000 \cdot 1{,}020408^{-20} = 88330{,}94$ denardır.◆

Bankaya yatırılan para miktarına (ya da geri çevrilmesi istenen borca hesaplanan faiz miktarı ne kadardır sorusu da sorulabilir. Kapitalin ilk ve gelecekteki değerlerini bildiğimize göre, hesaplanan faiz miktarı aslında bu iki değerin farkı olduğu açıktır. Faizlenmenin n–ci dönem sonunda hesaplanan faiz miktarını I_n ile işaret edersek, faizlenme şekli ne olursa olsun onun değeri $I_n = K_n - K$ formülüyle hesaplanır.

Daha konkre olarak, faiz oranı p ve yıl içindeki faiz dönem sayısı m olan dönem sonu faizlenmede faiz miktarı için:

$I_n = K_n - K = Kr^{nm} - K = K(r^{nm} - 1)$

formülü elde edilir, burada r dönem sonu faiz katsayısıdır.

Peşin (dönem başı) faizlenme durumunda faiz oranı π ve yıl içindeki faiz dönem sayısı m olmak üzere faiz miktarı için:

$I_n = K_n - K = Kp^{nm} - K = K(p^{nm} - 1)$

elde edilir; burada ρ dönem başı faiz katsayısıdır.

Aynı formüller, para miktarının sadece son değeri yani gelecekteki değeri bilindiğinde de yazılabilir. Bu durumda dönem sonu hesaplamada:

$I_n = K_n - K = K_n - K_n r^{-nm} = K\left(1 - r^{-nm}\right),$

ve dönem başı hesaplamada

$$I_n = K_n - K = K_n - K_n\rho^{-nm} = K\left(1-\rho^{-nm}\right)$$
olduğunu buluyoruz.

Not 2. *i / i* tablolarından yararlanıyorsak, formüller: dönem sonu hesaplama durumunda $I_n = K\cdot\left(\mathrm{I}^{nm}_{\frac{p}{m}} - 1\right)$, ve dönem başı hesaplamada $I_n = K\cdot\left(\mathrm{I}^{nm}_{\frac{\pi}{m}} - 1\right)$, şeklinde ifade edilir. Para miktarının sadece gelecekteki değerini kullandığımız durumda aynı formüller $I_n = K_n\left(1-\mathrm{II}^{nm}_{\frac{p}{m}}\right)$, ve $I_n = K_n\left(1-\mathrm{II}^{nm}_{\frac{\pi}{m}}\right)$ biçiminde ifade edilir.

5. 30 yıl önce 6% *p.a* faiz oranı bazında yarım yıllık faiz vadesiyle 10000 denar para yatırılmıştır. Bileşik faiz hesabına göre

a) dönem sonu; b) dönem başı

faizlenme uygulayarak bu miktar paranın faiz miktarı ne kadardır?

Kapitalin başlangıç değeri K = 10000 denar, etkin faiz oranı %3 ve bir yıl içindeki faiz dönem sayısı m = 2 biliniyor. Bu durumda toplam faiz dönem sayısı 60'tır.

a) Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$ olur. Hesaplanan faiz miktarı $I_{30} = K_{30} - K = =$ 10000 • ($1{,}03^{60}$ -1) = 48196 denar olduğunu buluyoruz.

b) dönem başı faiz katsayısı $\rho = \frac{100}{100-3} = 1{,}03093$, olur. Hesaplanan faiz miktarı $I_{30} = {}_{30} - K =$ = 10000 • ($1{,}03093^{60}$ -1) = 52194,3 denar olduğunu buluyoruz.

Son örnekten de görüldüğü gibi, dönem başı faizlenme alacaklıya, dönem sonu faizlenme ise borçlulara daha uygun olduğunu kanıtlamaktadır.

6. Bugün yatırılan para, bir yıl altı ay içinde 36000 denar paraya birikir. Faiz oranı 8% *p.a* ve faiz vadesi 3 ay olduğuna göre,

a) dönem sonu; b) dönem başı

biçimde hesaplanan faiz miktarı ne kadardır?

Kapitalin gelecekteki son değeri $K_{1,5}$ = 36000 denar, m = 4 ve toplam faiz dönem sayısı 6 olduğunu biliyoruz.

a) İskonto dönem sonu katsayısı $\frac{1}{r} = \frac{1}{1{,}02} = 0{,}9804$, ve bu durumda hesaplanan faiz miktarı $I_{1,5} = K_{1,5}\left(1-\frac{1}{r^6}\right) = 36000\cdot\left(1-0{,}9804^6\right) = 4031{,}5$ denardır.

b) İskonto dönem başı katsayısı $\frac{1}{\rho} = \frac{100-2}{100} = 0{,}98$, ve bu durumda hesaplanan faiz miktarı $I_{1,5} = K_{1,5}\left(1-\rho^{-6}\right) = 36000\cdot\left(1-0{,}98^6\right) = 4109{,}67$ denardır.◆

Alıştırmalar

1. 20 yıl önce bankaya yatırdığımız bir miktar paranın biriken bugünkü değeri 250000 denardır. Faizde kaldığı sürede faizlenme vadesi 3 aylık ve faiz oranı:

a) p = %6 *p.a.(d);* b) π = %6 *p.a.(a)*

olduğuna göre bankaya 20 yıl önce ne kadar para yatırmışız?

2. Bir kişi, 2 yıl sonra 16000 denar, 5 yıl sonra 24000 denar ve 8 yıl sonra 18000 denar ödemelidir. Faiz oranı %6 *p.a.* yarım yıllık faizlenme ile

a) dönem sonu; b) dönem başı

olmak üzere, kişi borcun tümünü bugün ödemek isterse, ne kadar para ödemelidir?

3. Bir kişi, 38. yaş gününde bankaya %48 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve aylık faiz dönemleriyle 50000 denar para yatırıyor. Tam bir yıl sonra yatırılan paraya ne kadar faiz ödenmiştir?

4. Bir kişi bankaya 50000 denar para yatırmış ve iki yıl sonra hesaptan 30000 denar çekmiştir. Faiz oranı %12 *p.a.(d)*, üç aylık faiz dönemleriyle, bu günden beş yıl sonra zaman süresinde ne kadar faiz miktarı ödenecektir?

(Not: Faiz miktarı iki kısımdan hesaplanmalıdır. Bu günden sonra iki yıl için ve para çekildikten sonra kalan para miktarı için faiz hesaplanacaktır.)

5. Bir kişi dört yıl önce 24000 denar olmak üzere borcunun bir kısmını ödemiştir. Üç yıl sonra daha 30000 denar ödemelidir. Kişi borcunun hiçbir kısmını ödememiş olduğu varsayımıyla, iki yıl sonra borcun tümünü birden ödemek için kaç para ödeyecektir? Yıllık dönem sonu faizlenme olmak üzere, faiz oranı %6 *p.a.* olsun. Dönem başı faizlenme durumunda ise ne kadar para ödeyecektir?

2.5. Faiz Dönem Sayısının ve Faiz Oranının Hesaplanması

Şimdiye dek elde edilen formüllerde n yıl sayısı olarak önceden bilinen ve genellikle yıl içinde faiz dönem sayısı tam olarak verilmiş şekilde ifade ediliyordu. Zaman süresi yıl olarak değil başka şekilde verildiği durumlarda yine zaman süresini yıl bazına çevirerek hesaplamaları yapıyorduk. Bu ise pratikte, özellikle faizlenme zamanını hesaplarken çok seyrek rastlanmaktadır. Verilen bir kapitalin belli miktarda faiz getirdiği zamanı ya da faiz dönem sayısının nasıl hesaplandığını göreceğiz. Başlangıç kapital K, dönem sonu faizlenme %p *p.a.(d)* faiz oranıyla, yıl içindeki dönem sayısı m ve faiz süresi tam sayı olmak mecburiyetinde olmayan n yıl olsun. Kapitalin gelecekteki değerini hesaplayan formülü $K_n = K\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm}$, dönüşümler yaparak *n* faiz süresini bulalım. Buna göre,

$$\frac{K_n}{K} = \left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm},$$

bu ifadenin logaritmasını alarak

$$\log\frac{K_n}{K} = \log\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm}$$

elde edilir. Logaritma işleminin temel özelliklerinden yararlanarak

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\log\left(1+\frac{p}{100m}\right).$$

elde edilir. Formülde $r = 1+\frac{p}{100m}$, dönem sonu faiz katsayısını katarak, faiz süresine ait

$$\boxed{n = \frac{1}{m\log r}\log\frac{K_n}{K}},$$

formülü elde edilir.

10 tabanlı logaritmalar çok sık *e* tabanına göre logaritma ile değiştirilir. Böyle durumda elde edilen formülün karşılığı olan:

$n = \frac{1}{m\ln r}\ln\frac{K_n}{K}$ formül elde edilir.

Benzer şekilde, faizlenme dönem başı olduğu durumda, faiz oranı %π *p.a.(a)*, yıl içindeki faiz dönem sayısı *m* olduğunu varsayarak, kapitalin gelecekteki değer formülünün logaritmasını almakla:

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\cdot\log\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right)$$

elde edilir. Bu ifadede $\rho = \frac{100m}{100m-\pi}$, dönem başı faiz katsayısını katmakla

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\cdot\log\rho,$$

elde edilir. Bu şekilde faiz süresine ait

$$\boxed{n = \frac{1}{m\log\rho}\log\frac{K_n}{K}}$$

formülü elde edilir.

1. a) Yatırılan 25000 denar para, %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla kaç yıl sonra 29851,31 denar olacaktır?

b) Yatırılan 13200 denar paranın, %8 *p.a.(a)* faiz oranıyla kaç yıl sonra gelecekteki değeri 18425,7 denar olacaktır?

Ödevde verilen veriler, zamanın hesaplanması için yukarıdaki formülün uygulanmasına yeterlidir. Faiz katsayısını hesapladıktan sonra, formülde yerine koyarak:

a) $r = 1 + \dfrac{6}{200} = 1{,}03$, oradan $n = \dfrac{1}{2\log 1{,}03}\log\dfrac{29851{,}31}{25000} = 3$ yıl elde edilir.

b) $\rho = \dfrac{100}{100-8} = 1{,}0869565$, oradan $n = \dfrac{1}{\log 1{,}0869565}\log\dfrac{18425{,}7}{13200} = 4$ yıl olduğunu buluyoruz. ◆

Formülde uygulanan logaritma işlemi, kapitalin gelecekteki değerini hesaplamak için elde edilen formülde bilinen tüm veriler değiştirildikten sonra da yapılabilirdi.

Kapitalin gelecekteki değerini hesaplamak için kullanılan *i / i* tablolarından zamanı da belirtebiliriz. Bunu birinci *i / i* tablodan okuyarak ya da kapitalin başlangıç değerine ait ikinci *i / i* tablodan okuyabiliriz.

2. Yatırılan 200000 denar paraya, yıllık faizlenme uygulayarak, %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla kaç yıl sonra gelecekteki değeri 243101,25 denar olacaktır?

Kapitalin gelecekteki değeri $K_n = K \cdot \mathrm{I}_p^n$ formülünden faiz oranı katsayısı için $\mathrm{I}_5^n = \dfrac{243101{,}25}{200000} = 1{,}21550625$ elde edilir. Birinci finansal tabloda, %5 faiz oranı bölümünde 1,21550625 değeri $n = 4$ satırına karşılık gelir.◆

Halbuki, *i / i* tablolardan yararlandığımızda bazı durumlarda aradığımız değer tam olarak tabloda olmayabilir, ancak aradığınız değer tablodaki iki değer arasında bulunabilir. Böyle durumlarda doğrusal interpolasyon (ara kestirim) yöntemi denilen kuralı uyguluyoruz. Lineer interpolasyon yöntemi denilen kuralın ilkesi, aslında orantıların özelliğine dayanır. Yani, tabloda ardı sıra gelen iki değerin farkı, onların peryotları arasındaki fark ile orantılıdır. Bunu konkre bir örnekle inceleyelim.

3. Yatırılan 50000 denar, yarım yıllık faizlenme dönemleriyle %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla ne kadar zaman sonra 75000 denara birikecektir?

Kapitalin gelecekteki değeri formülünde, tabloları kullanarak $K_{2n} = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n}$, değerini $\mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n} = \dfrac{K_{2n}}{K} = \dfrac{75000}{50000} = 1{,}5$ elde edilir. Birinci *i / i* tabloda % 3 etkin faiz oranına karşılık gelen sütunda 1,5 değerini bulamıyoruz. Bu sayı $1{,}46853371 < 1{,}5 < 1{,}51258972$ arasında bulunmaktadır. Bunlara karşılık gelen satırlardan, küçük değere 13, büyük değere ise 14 faiz dönem sayısı karşılık gelir.

Ödevimizin cevabı, 13 ve 14 sayıları arasında olan yarım yıl sayısıdır. Bunu tam olarak belirtmek için aşağıdaki tabloyu oluşturuyoruz:

$\mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n}$	2	$\mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n}$	2
1,46853371	13	1,46853371	13
1,51258972	14	1,5	2

Daha uygun görünürlük sağlamak için, sütunlardaki değerlerin farklarını hesaplayarak aynı tabloda yazdıktan sonra şu orantıyı kuruyoruz:

(1,51258972 -1,46853371): (14 -13) = (1,5 -1,46853371): (2n -13).

Demek ki,

$$2n - 13 = \frac{0{,}03146629}{0{,}04405601},$$

oradan da 2n = 13,714 elde edilir. Demek ki, faiz süresi n = 6,857 yıldır. Bu sayıyı, yıl ay ve günlere çevirmek için, sayının ondalık kısmını 12 ile çarparak ayları buluyoruz, elde edilen sayının yeni ondalık kısmını 30 ile çarpmakla gün sayısını elde ediyoruz. Buna göre 0,857 kısım yıl, aslında 0,857 ·12 = 10,284 aydır. Şimdi, 0,284 ay kısmını günlere çevirelim: 0,284 • 30 ≈ 9 gündür. O halde, faiz süresi 6 yıl 10 ay 9 gün olduğunu buluyoruz.◆

Aynı şekilde, faiz süresini hesaplamak için ikinci finansal tabloyu da kullanabiliriz.

4. Yatırılan 20000 denar kapital %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve yarım yıllık faiz vadesiyle, ne kadar zamanda 80000 denara artacaktır?

a) Önce çözümü formülü doğrudan doğruya kullanarak logaritma işlemi yardımıyla belirtelim. Faiz katsayısı r = 1,03, m = 2 olduğuna göre, kapitalin gelecekteki değeri formülünde değiştirerek $\frac{80000}{20000} = 1{,}03^{2n}$ elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının logaritmasını alırsak, log 4 = 2n. log 1,03, oradan da n = 23,4527 yıl elde edilir.

b) Aynı sonuca, ikinci finansal tabloyu kullanarak nasıl varıldığını görelim. $K = K_n \cdot \mathrm{II}_3^{2n}$, formülünden $\mathrm{II}_3^{2n} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, elde edilir. Bu değer %3 sütununda bulunmadığına göre, buna en yakın iki ardışık değeri buluyoruz:0,2493 < 0,25 < 0,2567. Küçük olan değer 47 yarım yıl vadesine, küçük olan değer ise 46 faiz vadesine karşılık gelir. Bu değerleri tabloda yazdıktan sonra, orantıyı daha kolay kurmak için son satırda değerlerin farklarını da yazacağız.

II_3^{2n}	2	II_3^{2n}	2
0,2567	46	0,2567	46
0,2493	47	0,25	2
0,0074	-1	0,0067	46 - 2

Karşılık gelen orantı:

0,0074: (-1) = 0,0067: (46 - 2n),

dir. Negatif işaretten kurtulmak için:

0,0074 = 0,0067: (2 - 46) biçiminde yazabiliriz.

Şimdi, $2n-46=\dfrac{0,0067}{0,0074}=0,9054$, oradan da 2$n$ = 46-9054 elde edilir. Buna göre faiz dönem süresi n = 23,4527 yıl olduğunu buluyoruz; bu ise tam 23 yıl 5 ay 13 gündür.◆

Çözülen her iki örnekte dönem sonu faizlenme söz konusudur. Faizlenme dönem başı olduğu durumda da aynı şekilde ifade edilir. Böyle durumda karşılık gelen dönem başı tablolar ve dönem başı faiz katsayısı ya da iskonto katsayısı belirtilir. Doğrusal interpolasyonun uygulanması aynı şekilde yapılır.

Yukarıda elde edilen formüllere gereken cebirsel dönüşümleri yaparak, kapitalin başlangıç ya da gelecekteki değeri formüllerinde, faiz oranının değeri hariç diğer parametreler bilindiğinde, bilinmeyen faiz oranını da belirtebiliriz.

Dönem sonu faiz oranı %p *p.a.(d),* yıl içindeki faiz dönem sayısı m, faiz süresi n yıl olan bir faizlenmeyi inceleyelim. Kapitalin gelecekteki değerini hesaplamak için uygulanan

$$K_n=K\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm},$$

formülünden, $1+\dfrac{p}{100m}=\sqrt[nm]{\dfrac{K_n}{K}}$, elde edilir. Bu denklemden faiz oranı için:

$$p=100m\cdot\left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}}-1\right)$$

formülü elde edilir.

5. Hangi yıllık dönem sonu faiz oranıyla 8 yılda, dört aylık faiz dönemleriyle bir anaparanın getirdiği faiz miktarı kendisine eşit olacaktır?

Ödevin koşuluna göre $I_8 = K$'dir. Bunu $I_8 = K_8 - K$ faiz denkleminde yerine koyarsak $K = K_8 - K$ elde edilir. O halde $K_8 = 2K$ olur. n = 8, m =3 değerlerini yukarıda elde edilen faiz oranı formülünde değiştirmekle:

$$p = 300 \cdot \left(\sqrt[24]{\frac{2K}{K}} - 1 \right) = 300 \cdot \left(\sqrt[24]{2} - 1 \right) = 8{,}79\%\ p.a.(d)$$

elde edilir.

Aynı örnekte, faiz oranını hesaplamak için kullanılan *i / i* tablolarından faiz oranının nasıl hesaplandığını gösterelim. Yukarıdaki örneklerde bilinmeyen zamanın belirtilmesinde uygulanan doğrusal interpolasyondan, şimdi yapılacak işlemin tek farkı, tablo değerlerinden başka, tabloda etkin faiz oranlarını da yazacağız. Böylece, yukarıdaki veriler gereğince $I_n = K \cdot \left(\mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm} - 1 \right)$, faiz hesaplama formülünde verileri yerlerine değiştirmekle

$$I_8 = K \cdot \left(\mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm} - 1 \right),$$

elde edilir. Bu durumda $I_8 = K$ olduğuna göre, birinci finansal tablonun değeri için $\mathrm{I}_{\frac{p}{3}}^{24} - 1 = 1$, buradan da $\mathrm{I}_{\frac{p}{3}}^{24} = 2$. elde edilir. *i / i* tablosunda, faiz oranı sütununda %2,75 faiz oranına karşılık 1,917626 değeri elde edilir; faiz oranı sütununda ise %3 faiz oranına 2,0327491 değeri karşılık gelir. Bizim aradığımız değer tam bu iki değer arasındadır. Tabloda okuduğumuz değerleri yazacağız.

$\mathrm{I}_{\frac{p}{3}}^{24}$	$\frac{p}{3}$	$\mathrm{I}_{\frac{p}{3}}^{24}$	$\frac{p}{3}$
1,917626	2,75%	1,917626	2,75%
2,0327941	3%	2	$\frac{p}{3}$
0,115168	0,75%	0,0823739	$\frac{p}{3} - 2{,}75$

Tablodaki değerlerin farkları, faiz oranlarının farklarıyla aynı orantıda olduğuna göre şu orantıyı yazabiliriz:

$$0{,}115168 : 0{,}75 = 0{,}0823739 : \left(\frac{p}{3} - 2{,}75 \right).$$

Buna göre, $\frac{p}{3} - 2{,}75 = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}0823739}{0{,}115168}$, ifadesinden etkin faiz oranı için $\frac{p}{3} = 2{,}928\%$, elde edilir, yani nominal dönem sonu faiz oranı *p* = %8,784 *p.a.(d)* olduğunu buluyoruz. Elde edilen bu değer öncekinden biraz farklıdır; bu ise tablodaki değerlerin yuvarlanmasından kaynaklanır.◆

6. Hangi dönem başı faiz oranıyla 80000 denar yarım yıllık faiz vadesi ile 2 yılda 120000 denara baliğ olur.

Aranılan formülü,

$$K_n = K\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right)^{nm},$$

kapitalin gelecekteki değeri formülünden doğrudan doğruya bulacağız. Denklemi bilinmeyen değer π'ye göre çözelim:

$$\frac{100m}{100m-\pi} = \sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}},$$

ya da

$$100m-\pi = \frac{100m}{\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}}}.$$

elde edilir. Bu son eşitlikten dönem başı faiz için:

$$\pi = 100m - 100m\cdot\sqrt[nm]{\frac{K}{K_n}}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\pi = 100m\left(1-\sqrt[nm]{\frac{K}{K_n}}\right).$$

formülü elde edilir.

Konkre örnekte, $n = 2$, $m = 2$ olduğuna göre:

$$\pi = 100\cdot 2\cdot\left(1-\sqrt[4]{\frac{K}{K_2}}\right) = 200\cdot\left(1-\sqrt[4]{\frac{80000}{120000}}\right) = 200\cdot(1-0{,}9036) = 19{,}28\%\ p.a.(a).\blacklozenge$$

elde edilir.◆

Alıştırmalar

1. Bankaya yatırılan 8000 denarın ne kadar zamanda gelecekteki değeri 55000 denar olur; faizlenme dönemleri yarım yıllık ve faiz miktarı:

a) p = %8 *p.a.(d)* b) p = %8 *p.a.(a)*.

2. Faiz dönemleri 3 aylık olmak üzere, %7 faiz oranıyla bankaya yatırdığımız 20000 denar kapital

a) dönem başı; b) dönem sonu

faizlenme ile ne kadar zamanda banka hesabımızda 40000 denar olacaktır?

3. Bankaya yatırılan 15000 denar kapital 25 yılda 28600 denar olmak için üç aylık faiz dönemleriyle

a) dönem başı; b) dönem sonu

faizlenme, hangi yıllık faiz oranıyla yapılmalıdır?

4. Faiz vadesi yıllık olmak üzere, hangi dönem sonu faiz oranıyla 18 yılda anapara iki katına erişir? Ödevi *i* / *i* tablolarıyla da çözünüz.

5. Bugün bankaya 20000 denar yatırdık, iki yıl sonra 10000 denar hesaptan çekeceğiz. Faizlenme dönemleri 3 aylık olmak üzere bu günden dört yıl sonra hesabımızda 30000 denar olursa, faizlenme hangi faiz oranıyla yapılmıştır? Dönem sonu ve dönem başı faizlenme yöntemlerini ayrı ayrı inceleyiniz.

6. 40000 denar borç %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla dört eşit taksitle ödenmelidir. İlk taksit 4 yıl sonra, ikinci taksit 6, üçüncüsü 15 ve dördüncüsü 18 yıl sonra ödenecektir. Aynı faiz oranıyla ve yıllık faiz dönemleriyle tüm borç kaç yıl sonra birden ödenebilir?

7. Bir kişinin, bugün bankaya yatırdığı bir miktar parası 2 yıl ve altı ay sonra 40000 denar olmuştur ve bundan 10000 denar faiz miktarı elde etmiştir. Faizin hesaplanması yarım yıllık dönemlerle olduğuna göre, para hangi faiz oranıyla yatırılmıştır?

8. Biri 25. doğum gününde bankaya 40000 denar yatırmış ve 33. doğum gününde hesabında 76800 denar olduğunu bankadan haber almıştır. Faizlenme dönemleri yarım yıllık olduğuna göre, para hangi faiz oranıyla bankaya yatırılmıştır?

9. Bankaya 2 yıl önce 70000 denar yatırılmış, bugün 20000 denar hesaptan çekilmiştir. Bir yıl sonra bankaya daha 10000 denar yatırılacaktır. Faiz oranı %10 *p.a(a)* yıllık faizlenme olduğuna göre ne kadar zaman sonra banka hesabımızda 100000 denar olacaktır?

2.6. Konu Pekiştirme Alıştırmaları

1. Bir kişi geçen yıl, her üç ayda parasal varlıklarını bankaya yatırıyor. Önce 1000 denar, üç ay sonra faiziyle beraber parasını çekiyor. Ondan sonra elde ettiği parayı yine üç ay için bankaya yatırıyor ve üç ay sonra yine faiziyle beraber parasını çekiyor ve bu şekilde daha iki defa tekrarlıyor.

Diğer bir kişi 1000 denar parasını bankaya önce 173 gün için yatırmış, ondan sonra tümünü çekmiş ve tüm parasını daha 96 gün için yine bankaya yatırıyor ve sonunda elde ettiği parasını daha 93 gün bankaya yatırıyor, öyle ki her yatırımın başında parasının faizini katmıştır.

Üçüncü kişi de 1000 denar parasını bir yıl için bankaya yatırmıştır.

Ondan sonra her üçü bankadan paralarını çekiyorlar. Faiz oranı,

a) %12 *p.a.(d)* yarım yıllık vadeli;

b) %12 *p.a.(a)* yarım yıllık vadeli

olduğuna göre, her biri ne kadar faiz almıştır? Hangisinin tasarrufu en hesaplıdır?

2. Bugün bankaya 100000 denar yatırıyoruz. Faiz oranı %5 *p.a.(d)* ve faizlenme üç aylık dönemlerle olmak üzere 15 yıl 25 gün sonra hesabımızda kaç para olacaktır? Bunu bileşik faiz hesabıyla ve basit ile bileşik faiz kombinasyonu uygulayarak hesaplayınız.

3. 10.09.2000 tarihinde bankaya 12000 denar yatırmıştık. Yıllık faizlenme vadesi, %10 *p.a.(a)* faiz oranıyla 31.12.2010 tarihinde hesabımızda ne kadar para birikecektir?

4. Yeni yıl ikramiyesi sayesinde, geçen yılın son gününde bankaya 60000 denar para yatırdık. Üç yıldan sonra yıl sonunda hesabımdan 24000 denar çekmeliyim, yatırımın ilk gününden beş yıl geçtikten sonra daha 40000 denar yatıracağız. Faiz oranı %3 *p.s.(d),* faiz dönemleri üç ay olmak üzere, bu günden 8. yıl sonuna kadar banka hesabımızda kaç para birikecektir?

5. 120000 denar borç üç eşit taksitle geriye çevrilecektir. Taksitlerden birincisi bir yıl sonra, ikincisi dört yıl sonra ve üçüncüsü altı yıl sonra ödenmelidir. Faiz oranı %10 *p.a.(d)*, yarım yıllık faizlenme dönemleriyle olmak üzere, 2 yıl 6 ay sonra borcun tümünü birden çevirmek için kaç para ödenmesi gerekir?

6. Bugün bankaya 36000 denar yatırdık, bugünden iki yıl sonra daha 24000 denar aylık vadeli %6 faiz oranıyla yatıracağız. Bu günden üç yıl sonra faiz miktarı ne kadar olacaktır?

7. Bir kişi tasarruf yaptığı bankadan, bu günden itibaren 8 yılda ödeme koşuluyla 600000 denar borç almak istemiştir. Bu gün 100000 denar yatırıyor ve beş yıl sonra daha 200000 denar yatıracak ve borcun kalanını varsa 10 yıl sonra ödeyecektir. Faiz oranı %8 *p.a.(d),* yarım yılık dönem faizlenmesiyle 10 yıl sonra borç ne kadar olacaktır?

8. Faiz oranı %8 *p.a.(d)*, üç aylık faiz dönemleriyle faizlenen bir borç, 25 ay sonra 50000 denar biriktiğine göre, borcun şimdiki değeri ne kadardır?

a) Sadece bileşik faiz hesabını kullanmakla;

b) Son ay için, bileşik ve basit faiz hesapları karmasını uygulamakla.

Faiz miktarını da hesaplayınız.

9. Kaç yıl sonra 20000 denar, yıllık faiz hesaplanması uygulayarak, %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 74669,12 denar olacaktır? Ödevi cebirsel şekilde ve *i / i* tablolarından yararlanmakla çözünüz.

10. %6,5 *p.a.(d)* faiz oranıyla, yarım yıllık faizlenme uygulayarak herhangi bir miktar para kaç yıl sonra üç katı kadar artacaktır? Aynı koşullar altında faizlenme dönem başı faiz oranıyla yapıldığında, zaman ne kadar değişecektir? Hem cebirsel hem de finansal tabloları kullanarak hesaplamayı yapınız.

11. Bankaya 15 yıl önce 10000 denar, 8 yıl önce de 20000 denar yatırılmıştır. Bugün daha kaç para yatırmalıyız ki 10 yıl sonra biriken para 100000 denar olsun? Faiz oranı %4 *p.a.* yarım yıllık dönem sonu faizlenme uygulanacaktır.

12. Faiz oranı %6 *p.a.(a)*, yarım yıllık faiz hesaplaması uygulayarak hangi kapitalin 12 yıl ve 3 ayda getireceği faiz miktarı, aynı koşullar altında 50000 denarın 30 yılda getireceği faiz miktarına eşit olacaktır?

13. Sattığı mal karşılığı bir kişiye 3 farklı teklif gelmiştir:

1) 40000 denar peşin ve %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 120000 denar 8 yıl 7 ay 20 gün sonra ödenecektir;

2) %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 10,5 yıl sonra 200000 denar ödenecektir;

3) 80000 denar peşin ve %3 *p.a.(d)* faiz oranıyla 120000 denar 8 yıl 7 ay 20 gün sonra ödenecektir;

Hangi teklif en uygun olduğunu hesaplayınız.

14. 100000 denar para %5,4 *p.a.(d)* faiz oranıyla, 80000 denar para ise %9,6 *p.a.(d)* faiz oranıyla bankaya yatırılmıştır. Faizlenme dönemleri 3 aylık olduğu durumda, ne zaman her iki kapitalin faiz miktarı aynı olacaktır? İkinci kapitale dönem başı faizlenme uygulanıyorsa faizlerin eşit olduğu zaman ne kadar değişecektir?

15. Bir borç: 8 yıl sonra %3 *p.a.(d)* faiz oranıyla 80000 denar, 20 yıl sonra %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla 40000 denar ve 23 yıl sonra %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 20000 denar ödenecektir. Faizlenme dönem sayısı yılda iki defa, yani yarım yıllık olduğuna göre, borç 25 yıl sonra birden ödendiği takdirde hangi faiz oranıyla ödenecektir?

16. Sınırlı sorumluluğu olan bir şirketin borçları:

- 5 yıl sonra ödenmesi gereken %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 50000 denar;
- 8 yıl sonra ödenmesi gereken %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 80000 denar;
- 12 yıl sonra ödenmesi gereken %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla 40000 denar.

Aynı zamanda 10 yıl sonra %3 *p.a.(d)* faiz oranıyla 60000 denar şirketin alacağı vardır. 15 yıl sonra %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla yıllık faiz hesaplaması olmak üzere, (basit faiz hesaplaması formülüyle değil) ödenecek borcun denkleşmesi (saldosu) bileşik faiz hesabına göre ne kadardır?

17. Bir kişi 34. doğum gününde bankada hesabına 18000 denar para yatırmıştır. 38. doğum gününde de daha 12000 denar ve 41. doğum gününde ise 24000 denar hesabından çekmiştir. Faiz oranı %8 *p.q.(d)* üç aylık dönemli faizlenme ile kişinin 46. doğum gününde hesabında ne kadar parası olacaktır? Konform faiz oranını uygulayınız.

18. SİGA şirketi bir malı peşin ödemek koşuluyla 60000 denara satmaktadır, GASİ şirketi ise, %5 *p.m.(d)* faiz oranıyla ve üç aylık dönemli faizlenme bazında 2 yıl sonra ödemek koşuluyla aynı malı 160000 denara satmaktadır. Hangi teklif daha uygundur?

19. 3 yıl önce bankaya 50000 denar yatırdık, bir yıl sonra hesaptan 10000 denar çekmeliyiz, 3 yıl sonra daha 20000 denar hesabımızdan çekeceğiz. Faiz oranı %4 *p.a.(d)*, yarım yıllık faizlenme vadesiyle ne kadar zamandan sonra banka hesabımızda 600000 denar olacaktır?

20. 2 yıl önce banka hesabımıza 80000 denar yatırdık, 3 yıl sonra ise 32 000 denar hesaptan çekeceğiz. Yıllık faizlenme dönemleriyle %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 7 yıl sonra toplam ne kadar faiz miktarı elde edilecektir?

21. İki yıl üç ay önce bankaya yatırılan para bu güne kadar elde edilen faiziyle beraber 20000 denardır. Bu arada hesaplanan faiz miktarı 5000 denardır. Faizin hesaplanması üç aylık dönem vadeli yapıldığına göre, hangi dönem sonu faiz oranıyla hesaplanmıştır? Dönem başı faizlenme yapıldığı durumda faiz oranlarındaki fark ne kadardır?

22. Banka hesabına bir yıl ve 2 ay önce 12000 denar yatırılmış, iki yıl üç ay sonra ise hesaptan 20000 denar çekilmiş ve banka hesabında para kalmamıştır (saldo 0).

Faizlenme yarım yıllık dönem vadeli yapıldığına göre, faiz hangi dönem sonu faiz oranıyla hesaplanmıştır?

23. Bugün, iki farklı bankada iki eşit miktar para yatırılmıştır. Birinde faiz oranı %16 *p.a.(d)*, diğerinde ise %10 *p.a.(d)*'dir. Kaç yıl sonra birinci bankada biriken para, ikinci bankada biriken paradan iki defa daha çok olacaktır? Faiz hesaplaması yarım yıllık vadeli, bu zaman esnasında faizlerin farkı 33200 denar olduğuna göre, yatırılan para miktarı ne kadarmış?

Konu Özetleri

Bir kapitalin faizinin hesaplanması **basit** ve **bileşik** olabilir. **Basit faiz**, bir yatırımın, yatırım vadesi süresince sadece anaparasının kazandığı faiz oranıdır. Yatırılan miktar para her dönemde değişir, yani her dönem sonunda elde edilen faiz miktarı anaparaya eklemekle yatırım miktarı büyür ve gelecek dönemde aynısı anapara eklenirse **bileşik faizden** söz edilir**,** yani: bir yatırımın yatırım vadesi boyunca kazandığı faizin de yeni yatırım vadesinde yatırıma tabi tutulması sonucu elde edilen getiriyi gösteren faizdir. Diğer bir deyişle **faizin de faiz kazanmasıdır.**

Bileşik faiz, yılda bir defa, iki defa ya da birçok defa hesaplanabilir. Faizin hesaplandığı zaman aralığına **faiz hesaplama vadesi** denir. Basit faiz hesaplamasında dört temel büyüklük şunlardır:

- K - anapara (temel kapital başlangıç miktar)
- i - faiz miktarı
- p – faiz oranı (yüzde olarak), 100 denar paranın zaman biriminde getirdiği faiz.
- t - paranın faizde kaldığı süre – yıl olarak, ya da daha küçük ölçü biriminde de olabilir.
- Bu büyüklükler, bileşik faiz hesabının da temel unsurlarıdır, halbuki burada ek olarak bileşik faizin temel unsuru:
- bir yıl esnasında faizin hesaplanma sayısı m, yani yıllık dönem sayısı da katılmaktadır.

Faizin yıllık hesaplanması (a) ile, yarım yıllık hesaplanması (sömestreli) (s) ile, üç ayda bir hesaplamayı (çeyrek) (q) ile, ayda bir vadesi (m) ile ve adı geçen her dönemlik hesaplamalarda faiz oranı yıl bazında sayılmaktadır.

Faiz oranı, yıllık faiz oranı gibi verildiğinde *p.a.* biçiminde işaret yazılır, yarım yıllık faiz oranı olarak alınırsa *p.s.* işareti yazılır. Üç aylık bazında da faiz oranı verilebilir ve bu durumda *p.q.* biçiminde ya da aylık bazında olursa *p.m.* işareti yazılır. Bu şekilde verilmiş olan faiz oranına **nominal faiz oranı** denir.

Ancak finansman ya da yatırımlarla ilgili kararlarda dönem uzunluğu yıl olduğu kadar yıldan daha kısa süreli olabilir. Bu gibi durumlarda yıllık olarak verilen faiz oranından **etkin faiz oranı (rölatif faiz oranı)** bulunarak işlem yapılmalıdır. Etkin faiz oranını, yıllık nominal faiz oranının (cari faiz ya da piyasa faiz oranı da denilen) yıl içindeki dönem sayısına bölünmesiyle bulunur.

Her dönem sonunda faiz hesaplanarak anaparaya katılırsa **dönem sonu faizlenme** söz konusu olur; böyle durumda faiz oranı *p.a.(d)* ile işaret edilir. Dönem sonu faizlenmenin faiz hesaplaması başlangıçta yatırılan anaparaya uygulanmaktadır.

Faizlenme her dönem başlangıcında yapılırsa, dönem başı faizin hesaplanması için temel değer, dönem sonunda elde edilen anaparadır; bu işleme **dönem başı (antisipatif) faizlenme** denir ve *p.a.(a)* ile işaret edilir.

Tüm faiz vadesinde elde edilen faiz miktarını temel değere katmakla elde edilen birikmiş değere, kapitalin **gelecekteki değeri** denir. Faizlenmesi yapılan temel değerin başlangıç miktarına *K*'nın **şimdiki değeri** de denir.

Dönem sonu faizlenme oranı *p*, bir yılda faiz dönem sayısı *m* ve $\boxed{r = 1 + \frac{p}{100m}}$ dönem sonu faiz katsayısı olmak üzere *K* kapitalinin gelecekteki değeri $\boxed{K_n = Kr^{nm}}$, formülüyle hesaplanır.

Peşin (antisipatif) faizlenmede, faiz opranı π, bir yılda faiz dönem sayısı *m* ve $\boxed{\rho = \frac{100m}{100m - \pi}}$ dönem başı faiz katsayısı olmak üzere *K* kapitalinin gelecekteki değeri $\boxed{K_n = K\rho^{nm}}$, formülüyle hesaplanır.

Faiz ister yıllık hesaplamayla, ister yılda birkaç devreden faizin hesaplanmasıyla aynı faiz miktarını veren faiz oranına **konform faiz oranını** denir ve $p_{k,m}$ ile işaret edilir. Bir yılda *m* defa faizlenmeyle ve yılda bir defa faiz oranı *p* olmak üzere yapılan faizlenme ile aynı faiz miktarı veren **konform faiz oranı** şu formül ile hesaplanır:

$$\boxed{p_{k,m} = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)}.$$

Verilen *K* kapitalin gelecekteki değeri K_n bilindiğinde, **temel değeri** şu formüllerle hesaplanır:

$$\boxed{K = K_n r^{-nm} = \frac{K_n}{(1 + \frac{p}{100m})^{nm}}}$$ dönem sonu faizlenme için ve

$$\boxed{K = K_n \rho^{-nm} = K_n \left(1 - \frac{\pi}{100m}\right)^{nm}}$$, dönem başı (peşin) faizlenme için.

Biriken paranın başlangıç değerini bulma işlemine, **iskontolama** ya da biriken değerin başlangıç değerini belirtme denir. Faiz oranlarının çarpımsal ters r^{-nm} ve ρ^{-nm} değerlerine **iskonto katsayıları (faktörleri)** denir.

Faiz oranı p ve yıl içindeki faiz dönem sayısı m olan dönem sonu faizlenmede r dönem sonu faiz katsayısı olmak üzere, **faiz miktarı** şu formül kullanılır:

$$\boxed{I_n = K\left(r^{nm} - 1\right)},$$

Peşin (antisipatif) faizlenme durumunda faiz oranı π ve yıl içindeki faiz dönem sayısı *m*, dönem başı faiz katsayısıdır ρ olmak üzere faiz miktarı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{I_n = K\left(\rho^{nm} - 1\right)},$$

Faizlenme dönem sonu, %*p p.a.(d)* faiz oranıyla, yıl içindeki dönem sayısı *m* ve dönem sonu faiz katsayısı olmak üzere **faiz süresi *n*** şu formülle hesaplanır

$$\boxed{n = \frac{1}{m \log r} \log \frac{K_n}{K}}$$

Benzer şekilde, faizlenme dönem başı (antisipatif) olduğu durumda, faiz oranı %π *p.a.(a)*, yıl içindeki faiz dönem sayısı *m* olduğunu varsayarak şu formül kullanılır:

$$\boxed{n = \frac{1}{m \log \rho} \log \frac{K_n}{K}}.$$

Yıl içindeki faiz dönem sayısı *m*, faiz süresi *n* yıl olduğunu farz ederek yıllık dönem sonu faiz katsayısı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{p = 100m \cdot \left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}} - 1\right)}.$$

3. PERİYODİK YATIRIMLAR (MEVDUATLAR) VE PERİYODİK ALACAKLAR (KİRALAR)

3.1. Periyodik Yatırımlar

Basit ve bileşik faiz hesaplarını uyguladığımız örneklerde, belli miktarda parasal varlıkların sadece bir defa yatırıldığı ya da farklı dönemlerde yatırılan veya istenildiğinde hesaptan çekilen miktarları incelemiştik. Bu durumda, yatırımların bazıları eşit, bazıları ise farklı, belli bir kurala göre değişebilen, örneğin aritmetik ya da geometrik diziler özelliğine göre artan ya da azalan veya tasarrufta olduğu gibi önceden belli bir kurala göre uymayan yatırımlar olabilir. Halbuki çok kez, eşit zaman aralıklarında yatırımların tekrarlandığına rastlıyoruz. Böyle durumlarda söz konusu **mevduattır.** Mevduat belli bir süre sonunda veya istenildiğinde çekilmek üzere bankalara faizle yatırılan paradır. Mevduatlar belli sürelerde aynı miktarlarda yatırıldığı durumda sabit mevduatlar diye de adlandırılıyorlar.

Yatırımlar, ödemeler serisinin başlama noktasına göre **dönem başı (antisipatif)** ve **dönem sonu (dekurzif) mevduatlar** olarak ikiye ayrılıyorlar. Yatırım esnasında her mevduatın faizi, yatırıldığı günden tüm mevduatların toplam değerinin hesaplandığı ana kadar hesaplanır. Dönem başı ya da dönem sonu faizlendirme uygulanabilir. Mevduat vadesi ve faiz vadesi bazı durumlarda aynı, bazı durumlarda ise farklı, yani mevduat vadelerinden daha sık ya da daha seyrek olabilirler. Pek sık tüm mevduatların toplam değeri ne kadardır, sorusu sorulmaktadır. Yatırım esnasında faizi hesaplanmış tüm mevduatların toplamına yatırımın **gelecekteki değeri** denir.

Şimdi, sadece yatırım dönemleri faiz vadeleriyle denk gelen sabit (değişmeyen) bireysel periyodik yatırımları inceleyeceğiz.

Yıl esnasında sadece bir mevduat ödendiği durumda, söz konusu **yıllık mevduat** olur, yatırım yılda iki defa yapıldığında, **altı aylık (yarım yıllık) mevduat**, yılda dört defa yatırım yapıldığında **üç aylık (çeyrek yıllık) mevduat** biçiminde adlandırılır. Yatırım ayda bir yapılırsa **aylık mevduat** olur. Burada da faizlendirme vadesi yıllık, altı aylık, üç aylık vb. olabilir.

Alıştırmalar

1. Mevduat nedir? Mevduatın temel özellikleri nedir?

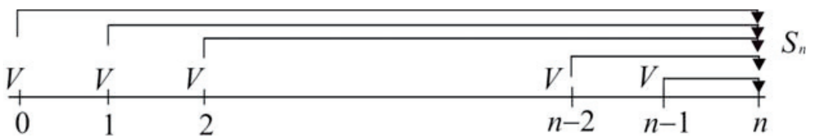
2. Faizinin hesaplanmasına göre mevduatlar nasıl olabilir?

3. Yatırım sayısına göre nasıl mevduatlar fark edebiliriz?

4. Yatırım süresine göre nasıl mevduatlar fark edebiliriz?
5. Mevduatların gelecekteki değeri nedir?

3.2. Mevduatların Gelecekteki Değerini Hesaplamak

Her bireysel mevduatın değeri V olsun. Bireysel mevduat sayısı n, faiz oranı dönem sonu uygulanan %p olsun. Faiz vadesi, yatırım vadesiyle aynıdır. Mevduatın ödenmesi dönem başı olsun (her vadenin başlangıcında ödeme yapılsın). Vade sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{p}{100}$. olduğunu biliyoruz. Her bireysel mevduat için bileşik faiz hesabını uygulayarak faiz miktarını bulmakla, mevduatların gelecekteki değerini elde edeceğiz. Şek.1'de yatırımlar ve faizlendirmeleri gösterilmiştir.



Şek. 1

Birinci vadenin başında yatırılan birinci mevduat, n – vade için karşılık gelen r faiz katsayısıyla son vadenin sonuna kadar süre için faizi hesaplanır ve değeri Vr^n dir. Yatırılan ikinci miktar V, aynı şekilde n – 1 vade için son vadenin sonuna kadar faizi hesaplanır ve değeri Vr^{n-1} dir. Bu şekilde kalan tüm bireysel yatırımların faizleri hesaplanır. Sondan ikinci olan yatırım n – 2 zamanına denk gelir ve iki vade için faizlenir ve değeri Vr^2'dir, son yatırım ise sadece bir vade için faizlenir ve değeri Vr'dir. Faiz döneminin sonuna kadar faizleri hesaplanmış olan tüm dönem başı yatırımların toplamı:

$S_n = Vr^n + Vr^{n-1} + \ldots + Vr^2 + Vr = V\,(r^n + r^{n-1} + \ldots + r^2 + r) = Vr\,(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1)$ olduğunu buluyoruz. Parantez içindeki ifade ilk terimi r olan n terimli bir geometrik dizisinin toplamıdır. Geometrik dizilerin ilk n terim toplamı formülünden yararlanarak, yatırımların dönem başı faizlendirme ile dönem başı yatırımların toplamı için şu formül elde edilir:

$$\boxed{S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Not 1. Faizin faizi i / i tablolarında, bir para birimi bazında dönem sonu yatırımların toplamını ifade eden $r\frac{r^n - 1}{r - 1}$, ifadesinin değeri III_p^n işareti altındaki cetvelde verilmiştir. Demek ki, üçüncü tablodaki değerler için $\text{III}_p^n = r\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ dir. Bu ifade *i / i* tablosunda, aynı faiz oranında 1'den *n*'e kadar vadelerin I_p^k değerlerini toplamakla elde edilir, yani $\text{III}_p^n = \text{I}_p^1 + \text{I}_p^2 + ... + \text{I}_p^n$ dir. Burada, yatırımlar *n* yılda %*p p.a.(d)* faiz oranıyla yapılmıştır. Buna göre, dönem başı faizlenen yatırımların toplamı:

$$\boxed{S_n = V \cdot \text{III}_p^n}.$$

formülüyle ifade edilir.

Not 2. Her bireysel vade için faiz oranı dönem başı olarak verilirse, ρ dönem başı faiz katsayısını kullanacağız. Böyle durumda dönem başı faizlenen yatırımların toplamı

$$\boxed{S_n = V\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}},$$

formülüyle ifade edilecektir. Burada $\rho = \dfrac{100}{100 - \pi}$ dönem başı faiz katsayısıdır. Böylece üçüncü *i / i* tablosundan yararlanarak, π dönem başı faiz oranı olmak üzere $\boxed{S_n = V \cdot \text{III}_\pi^n}$, formülü elde edilir.

Ödevlerin çoğunda yatırımların toplam sayısı değil de, yıl bazında yatırım sayısı ve yatırımın zaman aralığı (vadesi) verilmiş olabilir. Örneğin, *n* yıl boyunca, yılda *m* defa yatırım yapılıyor. Böyle durumda yatırımların toplam sayısı $n \cdot m$ çarpımına eşittir.

1. Her yılın başlangıcında bankaya 10000 denar yatırıyoruz. Faiz oranı %6 *p.a.(d),* yıllık vadeli olduğuna göre 4 yıl sonunda, bankada ne kadar para birikecektir?

Her bireysel yatırımın değeri $V_a = 10000$ denardır. Toplam yatırım sayısı $n = 4$, 4 yıl süreyle dönem başı dekurzif faizlenme, faiz katsayısı $r = 1 + \dfrac{6}{100} = 1{,}06$ olmak üzere 4 yatırım söz konusudur. Yatırımların son değeri:

$$S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1} = 10000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{1{,}06 - 1} = 46371$$

denar olduğunu buluyoruz.◆

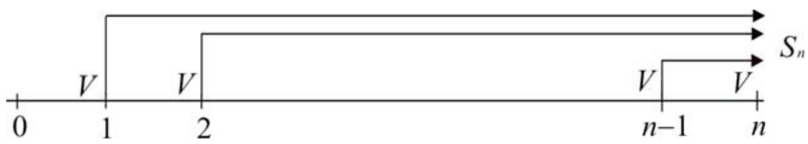
2. Bugünden başlayarak gelecek iki yıl esnasında, her üç ayın başlangıcında 5000'er denar yatırmaya başlıyoruz. Faiz oranı %10 *p.a.(d)* üç aylık vadeli olmak üzere, ikinci yılın sonunda toplam ne kadar paramız olacaktır?

Her bireysel yatırımın değeri V_{aq} = 5 000 denardır. Yatırımların sayısı, her yıl dörder mevduat $n = 2 \cdot 4 = 8$, dönem sonu faiz katsayısı ise, üç aylık vadeli faizlendirme ile hesaplanacaktır. Buna göre, faiz oranı $\frac{10}{4} = \%2{,}5$ *p.q.(d)* dir (çeyrek yıllık faiz oranı). O halde $r = 1 + \frac{2{,}5}{100} = 1{,}025$ olduğunu buluyoruz. Dönem başı yatırımların gelecekteki değeri:

$$S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1} = 5000 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^8 - 1}{1{,}025 - 1} = 44773$$

denar olduğunu buluyoruz.◆

Başlangıçta verilen tüm koşullar geçerli olsun, her yatırımın değeri V, mevduat (yatırım) sayısı n, faiz oranı dönem sonu % p ve faizlendirme vadesi, yatırımların vadesiyle aynı olsun.



Şek. 2

Dönem sonu faiz katsayısı r olsun ve yatırımlar her periyodun sonunda olsun, yani yatırımlar dönem sonu olsun. Şek.2'de görüldüğü gibi, son yatırımın faizi hesaplanmaz, sondan birincisi bir defa faizlenir, ikincisi iki defa ve geriye doğru sayarken ikinci yatırım $n - 2$ defa ve ilk yatırım $n - 1$ defa faizlenir. Bunlara karşılık gelen faizlenmiş miktarlar sırasıyla V, Vr, $Vr^2, \ldots, Vrn^{-2}$, Vr^{n-1} dir. Faizlenmiş yatırımların toplamı (gelecekteki değer) için:

$$S_n = V + Vr + Vr^2 + \ldots + Vr^{n-2} + Vr^{n-1} = V\,(+ r + r^2 + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1})$$

elde edilir. Parantez içindeki ifade, ilk terimi 1 ve ortak çarpanı r olan bir geometrik dizisinin n teriminin toplamı olduğuna göre, dönem sonu yatırımların gelecekteki değeri için şu formülü elde ediyoruz:

$$\boxed{S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Not 3. $\frac{r^n - 1}{r - 1}$, ifadesini i / i tablolarında $\left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)$ biçiminde bulunabilir. Demek ki, dönem sonu faizlenen yatırımların toplamını hesaplamak için formül:

$$\boxed{S_n = V \cdot \left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)}$$

şeklinde yazılabilir.

Not 4. Dönem başı faizlendirme uygulandığı durumda, yatırımların gelecekteki toplam değeri için formül:

$$\boxed{S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}},$$

şeklinde ifade edilir. Burada ρ dönem başı faiz katsayısı, $\rho = \dfrac{100}{100-\pi}$ dir. Üçüncü *i* / *i* tablolarından yararlanmakla dönem sonu faizlenmiş dönem sonu yatırımların gelecekteki toplam değeri için formül:

$$\boxed{S_n = V\cdot\left(1 + \mathrm{III}_{\pi}^{n-1}\right)}\ \text{dir.}$$

3. Bankaya her yıl sonunda dört yıl boyunca 10000 denar yatırılıyor. Yıllık vadeli faiz oranı %6 *p.a.(d)* olduğuna göre, dördüncü yıl sonunda yatırımın gelecekteki değeri ne kadardır?

Ödevin koşullarına göre, V_{da} = 10000 denar, n = 4, r = 1,06'dır. Vade sonu yatırımların gelecekteki değeri için:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1} = 10000\cdot\frac{1{,}06^4 - 1}{1{,}06 - 1} = 43746\ \text{denar elde edilir.}\ \blacklozenge$$

Dönem sonu faizlenmiş dönem başı yatırımların gelecekteki değeri, aynı koşullar altında, dönem sonu faizlenmiş dönem sonu yatırımların gelecekteki değerinden r kat daha büyük olduğunu fark edebiliriz, yani

$$S_n^{\,a} = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1} = r\cdot S_n^{\,d}$$

'dir; Faizlendirme dönem başı olduğu durumda ise $S_n^{\,a} = V\rho\dfrac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = \rho\cdot S_n^{\,d}$ 'dir. Demek ki dönem başı yatırımlar, dönem başı faizlendirme ile elde edilen gelecekteki değer, aynı yatırım koşullarıyla, dönem sonu yatırımların dönem başı faizlendirme ile elde edilen gelecekteki değerin ρ katıdır.

(Daha kısa olarak, dönem başı yatırımların gelecekteki değerini S_n^a ile, dönem sonu yatırımların gelecekteki değerini ise S_n^d ile işaret edeceğiz).

4. Bir kişi, bir buçuk yıl esnasında her ay sonunda 3000'er denar para yatırıyor. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* aylık vadeli hesaplama ile, yatırdığı paranın gelecekteki değeri ne kadar olacaktır?

Ödevin koşullarına göre, V_{dm} = 3000 denar, p = %6 *p.a.(d)* dir. Yatırımların toplam sayısı n = 12 -1,5 = 18 (yılda 12 mevduat), aylık faizlendirmeye karşılık gelen faiz oranı $\frac{6}{12}\%$, yani %0,5 *p.m.(d)*. Dönem sonu faiz katsayısı

$$r = 1 + \frac{0{,}5}{100} = 1{,}005\ \text{dir.}$$

Dönem sonu yatırımların gelecekteki değeri:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1} = 3000 \cdot \frac{1{,}005^{18} - 1}{1{,}005 - 1} = 56357$$

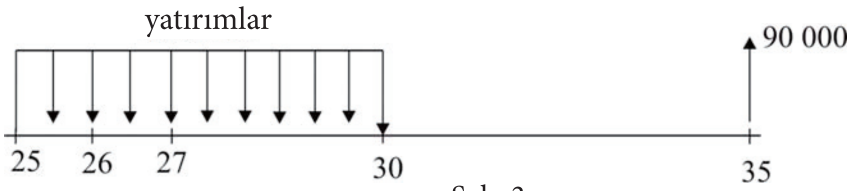
denar olduğunu buluyoruz.◆

5. Bir kişi 25. doğum gününden başlayarak 30. doğum gününe kadar her altı ay sonunda 8000'er denar banka hesabına yatırıyor. 35. doğum gününde hesabından 90000 denar çekmesi gerekiyormuş. Faiz oranı p = %8 *p.a.(d)* altı aylık faiz vadesiyle hesabında gereken para birikecek mi?

Kişi 5 yıl boyunca dönem sonu V_{ds} = 8 000 denar yatırımlar yapıyor. 30. doğum gününde yatırımın gelecekteki değeri daha 5 yıl faizde kalıyor (şek.3). Soru şudur: 35. doğum gününde hesabında biriken para 90000 denardan büyük ya da eşit olacak mı, yani $S_n \cdot r^{10} - 90000 \geq 0$ mıdır?

Faiz katsayısı $r = 1 + \frac{8}{2 \cdot 100} = 1{,}04$,

ve yatırımların toplam sayısı n = 10'dur.



Şek. 3

Buna göre,

$$V\frac{r^{10} - 1}{r - 1} \cdot r^{10} - 90000 = 8000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} \cdot 1{,}04^{10} - 90000 = 6049$$ denar olduğunu buluyoruz.

Demek ki, 90000 denar parasını çekmek için yatırımcının hesabında gereken parası varmış.

Alıştırmalar

1. Bir yatırımcı her yarıyıl başında 16 yıl boyunca 5000 denar

a) yarıyıllık faiz vadeli %4 *p.a. (d)*;

b) yarıyıllık faiz vadeli %4 *p.a. (a)*

faiz üzerinden yatırırsa 16 yılın sonundaki yatırım tutarı (gelecekteki değeri) ne kadar olur?

2. Her yılın sonunda 10 yıl boyunca, yıllık faiz vadeli %4 *p.a.(d)* faiz üzerinden 10000 denar yatırıyoruz. Son yatırım gününde yatırımların tutarını hesaplayınız.

3. Her yarıyıl sonunda 12 yıl boyunca, altı aylık faiz vadeli %8 *p.a.(d)* faiz üzerinden 1000 denar yatırılıyor. Yatırımlar

a) dönem sonu; b) dönem başı

olduğuna göre, yatırımın gelecekteki tutarını hesaplayınız.

4. Her ay sonunda 8 yıl boyunca 3000 denar mevduat,

a) aylık faiz vadeli % 12 *p.a.(d)*;

b) aylık faiz vadeli % 12 *p.a.(a)*;

faiz üzerinden yatırılıyor. Yatırımların gelecekteki değerini hesaplayınız.

5. Ödev 4'teki koşullar altında fakat mevduatlar dönem başı olduğu durumda yatırımın gelecekteki değerini hesaplayınız. Elde edilen değerleri kıyaslayınız. Hangi mevduat şekli ve hangi faiz oranı üzerinde yatırımların en büyük gelecekteki değeri elde edilecektir?

3.3. Bireysel Mevduatın Değerini Hesaplamak

Faiz oranı %*p p.a.(d)*, mevduatların gelecekteki değeri (tutarı) S_n ve yatırım süresi verilmiş olsun. Sabit mevduatın tutarını hesaplamak için dönem başı mevduatın gelecekteki değeri $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$, formülünden V mevduatı için

$$\boxed{V = S_n \frac{r-1}{r\left(r^n - 1\right)}}.$$

elde edilir.

1. Beş yıllık yatırım sonunda, yatırımların tutarı 40000 denar olmuştur. Her yıl başlangıcında yıllık vadeli %6 *p.a.(d)* faizi üzerinden yatırılan mevduat ne kadardır?

Burada, $r = 1{,}06$ dönem sonu faiz katsayılı dönem başı mevduat söz konusudur. Toplam $n = 5$ mevduat yatırılmış ve yatırılan miktarların tutarı $S_n = 40000$ denardır. Hesaplanması gereken, bireysel yıllık faiz vadeli mevduat tutarıdır. Örneğimizde verilen değerleri formülde yerine değiştirmekle, $V = 40000\frac{1{,}06 - 1}{1{,}06 \cdot \left(1{,}06^5 - 1\right)} = 6694$ denar elde edilir.◆

%*p p.a.(d)* faiz oranı, mevduatların gelecekteki tutarı S_n ve yatırım süresi bilindiği durumda, sabit mevduatın hesaplanması için dönem sonu vadeli mevzuatın gelecekteki tutarı $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$, formülünden V için şu formül elde edilir:

$$\boxed{V = S_n \frac{r-1}{r^n - 1}}.$$

Not.1. Faiz hesaplanması dönem başı olduğu durumda, bireysel mevduatların karşılıklı değerleri şu formüllerle hesaplanacaktır:
dönem başı mevduatlar için

$$\boxed{V = S_n \frac{\rho - 1}{\rho(\rho^n - 1)}},$$

dönem sonu mevduatlar için

$$\boxed{V = S_n \frac{\rho - 1}{\rho^n - 1}}.$$

2. Beş yıl sonra 120000 denara ihtiyacımız olacaktır. Her yarıyıl sonunda 5 yıl boyunca ne kadar mevduat yatırmalıyız? Faiz oranı %5 *p.a.(d)* yarıyıl vadelidir.

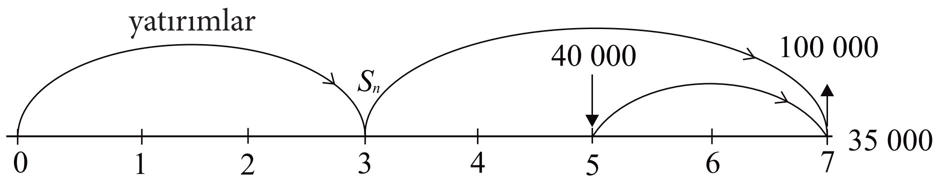
Yatırımlar sayısı $n = 10$, $S_n = 120000$ denar, dönem sonu faiz katsayısı ise $r = 1 + \frac{5}{2 \cdot 100} = 1{,}025$ 'dir. O halde,

$$V = S_n \frac{r - 1}{r^n - 1} = 120000 \cdot \frac{1{,}025 - 1}{1{,}025^{10} - 1} = 10714$$

denar olduğunu buluyoruz. ◆

3. İlerdeki üç yıl boyunca, her üç ay başında üç aylık mevduatlar ödenecektir. Bu günden beş yıl sonra sadece bir defa mahsus 40000 denar yatırılacaktır. Yedi yıl sonra hesabımızdan 100000 denar çekmeliyiz. Üç aylık vadeli faiz oranı %8 *p.a.(d)* olduğuna göre, bireysel mevduat ne kadar olmalıdır ki, bu günden yedi yıl sonra hesabımızda 35000 denar olsun?

Yatırımları ve çekilen miktarı zaman ekseninde gösterelim (şek.4).



Şek.. 4

Mevduatların toplam gelecekteki değeri hesaplandıktan sonra bu miktar daha dört yıl faizde kalır. Yatırılan 40000 denar da 2 yıl faizde kalır. Çekilen 100000 denardan sonra şu denklem elde edilir:

$S_n \cdot r^{44} + 40000 \cdot r^{24}$ -100000 = 35000.

Son denklem, bu günden gelecekteki yedi yıl süresinde yapılacak işlemleri göstermektedir. Bu durumda dönem başı yatırımların gelecekteki değerini hesaplayan $S_n = Vr \frac{r^{3 \cdot 4} - 1}{r - 1}$, formülünde n = 12, dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$'dir. Üç aylık etkin faiz oranı %2'dir. S_n tutarı 16 defa faizlenir, 40000 denar ise 8 defa faizlenecektir. O halde

$$V \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}02^{12} - 1}{1{,}02 - 1} \cdot 1{,}02^{16} + 40000 \cdot 1{,}02^{8} = 135000$$

$$V \cdot 18{,}78 + 46866 = 135000$$

elde edilir. Buna göre mevduatın değeri V_{aq} = 4693 denardır.◆

Not. 2. İncelenen son örnekteki ödevlere benzer ödevleri çözerken yukarıda yapıldığı gibi, yatırımları zaman ekseninde göstermekle, faizlendirme periyotlarını daha kolay hesaplayabilirsiniz.

Alıştırmalar

1. Dönem sonu altı aylık vadeli mevduatların 7 yıl boyunca yatırılmasıyla 300000 denar tutar elde edilmiştir. Faiz oranı:

a) altı aylık vadeli %4 *p.a.(d);*

b) altı aylık vadeli %4 *p.a.(a);*

olduğuna göre bireysel mevduatın değeri ne kadardır?

2. Dönem başı yıllık vadeli mevduatların 6 yıl boyunca %5 *p.a.(d)* faiz üzerinden yatırılmasıyla hesabımızda 71420 denar olmasını istersek, bireysel mevduat ne kadar olmalıdır? Faiz vadesi yıllıktır.

3. Bir kişi banka hesabına 25. doğum gününden 40. doğum gününe kadar, dönem sonu üç aylık vadeli sabit olmak üzere ne kadar para yatırmalıdır ki, banka hesabında 50. doğum gününde 500000 denarı olsun? Faiz oranı üç aylık vadeli %6 *p.a.(d)*'dir.

4. Bir kişi 2 yıl altı ay boyunca, sabit değerli üç aylık dönem başı mevduatlar yatırıp dönem sonunda hesabında 50000 denar parası olmuştur. Üç aylık vadeli %6 *p.a.(d)* faiz üzerinden yatırılan bu mevduatların bireysel değeri ne kadardır?

5. Bir kişi 35 yaşından 40 yaşına kadar, vade sonu altı aylık mevduatları bankaya yatırıyor. 43 yaşının sonunda 16000 denar hesaptan kaldırmak ve 47 yaşının sonunda hesabında 120000 denar olmasını isterse, kişi hesabına ne kadar para yatırmıştır? Faiz oranı %8 *p.a.(d)* ve faizlendirme altı aylıktır.

3.4. Mevduat Sayısını ve Son Mevduatın Hesaplanması

Mevduatın gelecekteki değerini (tutarını) hesaplamak için kullandığımız $S_n = Vr\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ dönem başı mevduatlara ait ve $S_n = V\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ dönem sonu mevduatlara ait formüller gereğince, gelecekteki değer tutarı, bireysel mevduat değeri ve faiz oranı bilindiğinde, yatırımların sayısı n hesaplanabilir. Dönem başı mevduatlar için

$$\frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{S_n}{Vr}$$

$$r^n - 1 = \frac{S_n(r-1)}{Vr},$$

geçerlidir. Oradan da

$$r^n = \frac{S_n(r-1)}{Vr} + 1.$$

elde edilir.

Yatırımların sayısı n sadece logaritma işlemiyle belirtilebilir. Logaritma işleminin temel özelliklerinden yararlanarak:

$$\log r^n = \log\left(1 + \frac{S_n(r-1)}{Vr}\right)$$

$$n \cdot \log r = \log\frac{Vr + S_n(r-1)}{Vr}$$

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log\frac{Vr + S_n(r-1)}{Vr}}.$$

elde edilir. Daha kolay hesaplama yapmak için yatırımların gelecekteki değeri formülünde, verilen değerlerin değiştirilmesinden sonra elde edilen ifadenin logaritması alınır.

Benzer şekilde dönem sonu mevduatlar için

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log\frac{V + S_n(r-1)}{V}}.$$

formülü elde edilir.

Not 1. Dönem başı faiz oranı için hesaplamalar, dönem başı mevduatların gelecekteki değerine karşılık gelen formüllere yapılır.

1. Her yılın başında %6 *p.a.(d)* yıllık vadeli faiz üzerinden 10000 denar kaç defa yatırılmalıdır ki hesabımızda 46371 denar olsun?

Mevduatlar dönem başıdır. Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$ dır. O halde,

$$1{,}06^n = \frac{46371(1{,}06-1)}{10000 \cdot 1{,}06} + 1 = 1{,}26248$$

elde edilir. Bu ifadenin 10 tabanına göre logaritmini alırsak n. log 1,06 = log 1,26248 ve oradan n = 4 elde edilir. Demek ki dört yıl, yani dört defa yatırım yapmalıyız.◆

2. 35000 denarlık mevduatlar %6 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlendirme üzerinde her yarımyılda yatırılıyor. Yatırımların gelecekteki değeri son mevduatın ödendiği günde 401651 denar olmasını istersek, kaç mevduat ödenmelidir?

Şunu fark edelim, gelecekteki değer son yatırım yapıldığı günde hesaplandığı takdirde yatırımlar dönem sonudur. Etkin faiz oranı %3 olduğuna göre r = 1,03'tür. Buna göre, $401651 = 35000 \cdot \frac{1{,}03^n - 1}{1{,}03 - 1}$, buradan da $1{,}03^n = 1{,}34427$ ve sonunda n =10 elde edilir. Demek ki, 10 mevduat ödenmelidir. ◆

3. Yatırımlar dönem sonu 3 aylık vadeli, faiz oranı %8 *p.a.(d)* üç aylık faizlendirme vadeli 10000 denarlık kaç mevduat yatırılmalıdır ki, gelecekteki değeri 137200 denar olsun?

Dönem sonu mevduat $r = 1 + \frac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$ için, $137200 = 10000 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ geçerlidir. O halde, $1{,}02^n = 1{,}2744$ ve oradan $n \approx 12$ elde edilir. Cevap tam 12 olsaydı, tam 12 mevduat, yani 3 yıl 4'er mevduat gerekecekti, halbuki elde edilen değer yaklaşıktır. Onun tam değeri n = 12,2446'dır. Bu demektir ki, istenilen para tutarını elde etmek için mevduat sayısı 12'den fazla olacaktır. Bu durumda, 12 mevduat bilinen 10000 denarlık ve 13. mevduatın değeri diğerlerinden küçük olacaktır. **Son mevduat**, diğerlerinden farklıdır ve ona **mevduatın kalanı** denir. ◆

Son mevduatın hesaplanması için bir formül bulalım. Mevduat sayısı toplam n olsun ve bunlardan n -1 tanesinin değeri aynı V, son mevduatın değeri $V_0 \neq V$ olsun. Zaman ekseninde dönem başı mevduatların durumunu gösterelim (şek.5).

Şek. 5

Vade sonu faiz katsayısı r için:

$S_n = Vr^n + Vr^{n-1} + \ldots + Vr^2 + V_0 r,$

$S_n = Vr^2 (r^{n-2} + \ldots + r + 1) + V_0\, r.$

elde edilir. Geometrik dizisinin terimlerinin toplamı formülünden yararlanarak

$$S_n = Vr^2 \frac{r^{n-1}-1}{r-1} + V_0 r\,,$$

olduğuna göre,

$$\boxed{V_0 = \frac{S_n}{r} - Vr\frac{r^{n-1}-1}{r-1} = \frac{1}{r}S_n - V\frac{r^n - r}{r-1}}.$$

elde edilir.

Not 2. *i / i* tablolarından yararlanıyorsak $\frac{1}{r}$ ifadesi, II^1_p tablosunda verilmiş olan iskonto katsayısına karşılık gelir, $\frac{r^n - r}{r-1}$ ifadesi ise tam III_p^{n-1} 'dir. Buna göre son mevduat

$$\boxed{V_0 = S_n \cdot \mathrm{II}^1_p - V \cdot \mathrm{III}^{n-1}_p}$$

şeklinde yazılabilir.

Not 3. Yatırımların sayısını belirtirken, n doğal sayı olmadığı durumda, n için hesaplamada elde edilen sayıdan ilk büyük olan tam sayı alınır. Böyle durumda $V_0 < V$, $n - 1$ mevduatın değeri V'dir, sonuncunun ise V_0'dır.

Vade sonu mevduatlarda ise, zaman ekseni şek.6'da gösterilmiştir.

Şek. 6

Böyle durumda

$$S_n = Vr^{n-1} + Vr^{n-2} + \ldots + Vr + V_0,$$

dir. Eşitliği V_0 a göre düzenleyerek, geometrik dizisinin ilk n – terim toplamı formülünden yararlanmakla:

$$\boxed{V_0 = S_n - Vr\frac{r^{n-1}-1}{r-1} = S_n - V\frac{r^n - r}{r-1}}$$ elde edilir.

Not. 4. *i / i* tablolarından yararlanarak

$$\boxed{V_0 = S_n - V \cdot \mathrm{III}^{n-1}_p}$$

formülünü yazabiliriz. Bu formül, dönem sonu yatırımlarda diğerlerinden farklı olan son mevduatın değerini hesaplamak için kullanılır.

Not 5. Faiz hesaplanması dönem başı olduğu durumda, son mevduat için şu formül elde edilir:

dönem başı yatırımlar için

$$V_0 = \frac{1}{\rho} S_n - V \frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1},$$

ve dönem sonu yatırımlar için

$$V_0 = S_n - V \frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}.$$

4. Yarım yıllık vadeli, faiz oranı %10 *p.a.(d)* altı aylık faizlendirme vadeli 8000 denarlık kaç mevduat yatırılmalıdır ki, son mevduattan evvel tüm yatırımların gelecekteki değeri 60000 denar olsun?

$r = 1 + \frac{10}{2 \cdot 100} = 1{,}05$'tir. Gelecekteki değer, son mevduattan altı ay önceki biriken paradır, demek ki yatırımlar dönem başıdır, yani $60000 = 8000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1}$, elde edilir. Oradan da $1{,}05^n = 1{,}35714$ ve $n \approx 6{,}26$ elde edilir. Bu durumda $n = 7$ alınır, yani 8000 denar olmak üzere 6 sabit mevduat yatırılır, son yedinci mevduat ise özel olarak hesaplanacaktır:

$$V_0 = \frac{60000}{1{,}05} - 8000 \frac{1{,}05^7 - 1{,}05}{1{,}05 - 1} = 57143 - 57136 = 7$$

elde edilir. Buna göre son mevduat 7 denar olacaktır.◆

Not 6. Son mevduatın değeri negatif sayı elde edildiği durumda, mevduatın gelecekteki değerini hesapladığı gün, banka mevduat sahibine o kadar para geri çevirmelidir.

Alıştırmalar

1. Altı ay vadeli dönem başı 35000 denar mevduatlardan kaç tane ödemeliyiz ki sonunda 512389 denarımız olsun? Faizin hesaplanması altı aylık ve faiz oranı:

a) %6 *p.a.(d);* b) %6 *p.a.(a)* olsun.

2. Üç aylık vadeli, %6 *p.a.(d)* faiz oranı üzerinden 235000 denarlık kaç dönem sonu mevduat yatırılmalıdır ki, son mevduatın ödendiği gün hesabımızda 2245438 denar olsun? Faiz hesaplanması 3 aylık vadelidir.

3. Üç aylık vadeli, %6 *p.a.(d)* faiz oranı üzerinden 1000 denarlık kaç dönem başı mevduat yatırılmalıdır ki, hesabımızda 40000 denar olsun? Faiz hesaplanması 3 aylık vadelidir.

4. Her iki ayın başında 1000 denar yatırılırsa, son yatırımdan iki ay sonra banka hesabında 70000 denar olacaktır. Faiz oranı %12 p.a. (d) faiz hesaplaması her iki ayda yapılmış olsun. Son yatırım ne kadardır?

5. Her yıl başında 2000 denar yatırılmıştır. Son yatırımdan dört yıl sonra hesaptan 7000 denar çekilmiş ve son yatırımdan altı yıl sonra hesapta 80000 denar kalmıştır. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* yıllık faizlendirmedir (dikkat ediniz, yatırım dönem başıdır ve biriken para son yatırımdan bir yıl sonra hesaplanır).

3.5. Yatırımlarda Faiz Oranının Hesaplanması

1. Altı aylık vadeli dönem başı 2000 denarlık borç, hangi faiz oranıyla,16. yılın sonunda 125000 denar olacaktır. Faiz hesaplanması yarıyıllık olsun.

Dönem başı yatırımların gelecekteki değerini hesaplamak için kullanılan formülü alacağız ve hangi büyüklüklerin belli olduğunu, hangileri ise bilinmeyen olduğunu belirteceğiz.

Dönem başı yatırımların, dönem sonu faizlendirmesiyle biriken gelecekteki değeri hesaplamak için kullandığımız $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$, formülünde, S_n ve V bilindiğinde, bilinmeyen r faiz katsayısını, yani %p *p.a.(d)* değerini hesaplamak için

$$\frac{S_n}{V} = r\frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{r^{n+1} - r}{r - 1},$$

$$\frac{S_n}{V}(r - 1) = r^{n+1} - r,$$

$$r^{n+1} - \left(\frac{S_n}{V} + 1\right)r + \frac{S_n}{V} = 0.$$

denklemi elde edilir. Bu ise r katsayısına göre bir polinom denklemidir ve genel olarak derecesi 3'ten büyüktür. Bu gibi denklemleri çözmek için (bazı özel durumlar hariç), belli bir kural yoktur. Bu nedenle, bu gibi denklemleri bilinen bazı nümerik yöntemlerle çözeceğiz. Halbuki, amacımız şimdi nümerik yöntemlerle denklemlerin nasıl çözüldüğünü öğrenmek değildir. Burada sadece pratik ödevlerin yararına faiz oranını en kolay biçimde belirtmektir. Bu nedenle faiz oranının hesaplanmasını finansal tablolardan belirteceğiz. Buna göre, $S_n = V \cdot \mathrm{III}^{n}_{\frac{p}{2}}$ formülünden belirtilen faiz oranı yarım yıllık vadeli olduğundan $\frac{p}{2}$'dir. Oradan nominal yıllık faiz oranını da belirtiyoruz.

Verilen ödevde $125000 = 2000 \cdot \mathrm{III}^{n}_{\frac{p}{2}}$, elde edilir. Burada toplam n = 16. 2 = 32 dir. Demek ki 32 ödeme olduğunu buluyoruz.

Tabloda $\text{III}_{\frac{p}{2}}^{n} = \dfrac{125000}{2000} = 62{,}5$, olduğuna göre, n = 32 için tablolarda 62,5 değerine karşılık gelen sayıyı arıyoruz. Bu değer tabloda yoktur, fakat buna en yakın iki yaklaşık değer vardır: 62,19536018 < 62,5 < 65, 20952741. Bu değerlerden biri %3,75, diğeri ise %4 faiz oranına karşılık gelir. Bu iki değer arsı 62,5 değerine karşılık gelen değeri belirtmek için, doğrusal enterpolasyon yapmamız gerekir. Bunu daha kolay yapmak için verileri tabloda yazacağız.

$\text{III}_{\frac{p}{2}}^{32}$	$\frac{p}{2}$	$\text{III}_{\frac{p}{2}}^{32}$	$\frac{p}{2}$
62,19536018	3,75	62,19536018	3,75
65,20952741	4	62,5	$\frac{p}{2}$

Oradan şu orantıyı kuruyoruz:

$$(4-3{,}75):(65{,}20952741-62{,}19536018)=\left(\frac{p}{2}-3{,}75\right):(62{,}5-62{,}19536018),$$

yani $0{,}25:3{,}01416723=\left(\dfrac{p}{2}-3{,}75\right):0{,}30463982$ elde edilir. Bu şekilde, tablodaki değerler arasındaki orana göre, faiz oranı aralığının ara değerlemesi yapılır.

Buna göre, $\dfrac{p}{2}-3{,}75=\dfrac{0{,}30463982\cdot 0{,}25}{3{,}01416723}=0{,}025$, yani p = %7,55 *p.a.(d)* elde edilir.

Değerlerin farkından yararlandığımıza göre, yukarıdaki tabloyu daha bir satır ile genişletecek ve bu farkları o satırda yazmakla işimiz kolaylaşacaktır.

Aynı işlemleri dönem sonu yatırımlar için de yapacağız. Yatırımların gelecekteki değeri $S_n = V\dfrac{r^n-1}{r-1}$, formülünden, faiz katsayısı r için:

$$\frac{S_n}{V}(r-1)=r^n-1,$$

$$r^n-\frac{S_n}{V}r+\frac{S_n}{V}-1=0,$$

denklemi elde edilir. Bu denklem de r değişkenli polinomdur. Yatırımların gelecekteki değerini hesaplamak için i / i tablolarındaki değerleri kullanan $S_n = V\left(1+\text{III}_p^{n-1}\right)$, formülünden yararlanarak $\text{III}_p^{n-1}=\dfrac{S_n}{V}-1=\dfrac{S_n-V}{V}$ elde edilir. n – 1'in bilinen değeri için $\dfrac{S_n-V}{V}$ değeri tabloda varsa, faiz oranı doğrudan doğruya okunur. Aksi halde, faiz oranını doğrusal enterpolasyon ile belirtiyoruz.◆

2. Faiz hesaplaması 3 ay vadeli olmak üzere, her üç ay sonunda bankaya 2000 denar yatırarak 5 yıl sonra hesabımızda 52000 denar olmak için faiz oranı ne kadar olmalıdır?

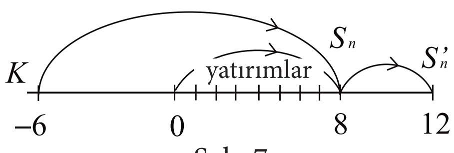
Burada, 20 ödeme, yani n =20 dönem sonu yatırımı inceliyoruz. S_n = 52 000, V=2000 ve faiz oranı $\frac{p}{4}$ olduğunu alıyoruz. O halde $52000 = 2000\left(1+\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19}\right)$ denklemi elde edilir, oradan da $\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19} = 25$ elde edilir. Tablolarda 19 sayısına karşılık gelen bölümde, 25 sayısını bulamıyoruz. Ancak %2,5 sütununda 24,54244 ve %2,75 sütununda 25,19739750 sayılarını buluyoruz. Aşağıdaki tabloyu oluşturuyoruz:

$\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19}$	p	$\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19}$	p
24,54244	%2,5	24,54244	%2,5
25,19740	%2,75	25	$\frac{p}{4}$
0,65496	%0,25	0,45756	$\frac{p}{4}-2,5$

$0,65496 : 0,25 = 0,45756 : \left(\frac{p}{4}-2,5\right)$ orantısını kurduktan sonra p = %10,7 elde edilir.◆

3. Bir kişi 6 yıl önce banka hesabına 30000 denar yatırmış, bu günden ve gelecek sekiz yıl esnasında her yıl sonunda 5000'er denar yatıracaktır. Bu günden sekizinci yıl sonunda kişinin banka hesabında 47745 denar birikecektir. Yıllık faiz üzerinden faiz oranı aynı olmak üzere, bu günden 12 yıl sonra banka hesabında ne kadar parası olacaktır?

Zaman ekseninde, bugüne 0 karşılık gelmek için -6'dan başlayacağız.



Şek. 7

$K = 30000$, $r = 1+\frac{p}{100}$, $S_n = 47745$, $S_n = 5000\left(1+\mathrm{III}_p^7\right)$

olduğuna göre, $47745 = 5000\left(1+\mathrm{III}_p^7\right)$, denklemi elde edilir, oradan da $\mathrm{III}_p^7 = 8,5491$, elde edilir. Tabloda $n = 7$ için, bunun değeri $p = \%5$ elde edilir. Şimdi de, bugünden başlayarak 12 yıl boyunca yatırılan mevduatların toplam değerini hesaplayalım:

$$S'_n = Kr^{18} + S_n r^4 = 30000 \cdot 1{,}05^{18} + 47745 \cdot 1{,}05^4 = 130233 \text{ denar elde edilir.} \blacklozenge$$

Alıştırmalar

1. 2,5 yıl boyunca her altı ay başında yatırılan 20000 denarlık mevduatların süre sonunda toplam değeri 112658 denar olmuştur. Mevduatlar hangi faiz oranıyla yatırılmıştır?

2. Dört yıl boyunca her dört ayda 5000 denar mevduat yatırılmış ve son mevduatın yatırıldığı günde banka hesabında 75000 denar birikmiştir. Dönem sonu hangi faiz oranıyla yatırım yapılmıştır? Yatırım vadesi dört aylıktır.

3. Her yıl
a) dönem başı; b) dönem sonu
10000'er denar yatırılarak 20 yıl sonra hesabımızda 260000 denar biriken paramız olması için hangi faiz oranıyla parayı yatırmalıyız?

4. Her altı ay sonunda yatırılan 3000 denarlık mevduatlar 16. yılın sonunda 188100 denar olmuştur. Faiz hesaplama vadesi altı ayda olduğuna göre, yatırılan para hangi faiz oranıyla hesaplanmıştır?

5. Üç aylık dönem başı 5000 denarlık anüitelerle bankaya 8 yıl boyunca para yatırdık. Faiz hesaplanma vadesi üç aylık dönem sonu yapılarak sekizinci yıl sonunda banka hesabımızda 312500 denar birikmiştir. Yatırılan para hangi faiz oranıyla hesaplanmıştır?

3.6. Periyodik Alacaklar (Kiralar)

Yatırımlarda yapılan incelemeler, belli zaman aralıklarla alınan para miktarları için de benzer incelemeler yapılabilir. Örnek, banka hesabımızda bulunan bir miktar parayı, birden değil, belli ve eşit zaman aralıklarında küçük miktarlar halinde çekebiliriz. Eşit zaman aralıklarında alınan alacaklar söz konusu olunca ilk aklımıza gelen **kiradır**. Eşit miktarda alacakları **sabit kiralar** (**rentler**) diye adlandıracağız. Kira anüiteleri önceden belirlenmiş kanuna göre değişebilir, örneğin geometrik ya da aritmetik dizisi kanununa göre değişebilir. Böyle kiralara **değişken kiralar** denir. Özelliklerine göre kiralar birçok şekilde adlandırılıyorlar; ödeme zamanına göre, periyodun başlangıcında ödenirse **dönem başı kiralar**, periyodun sonunda ödenirse **dönem sonu kiralar** diye adlandırılıyorlar. Ödemelerin zaman süresine göre

geçici kiralar (belli bir süre için), **ömür boyu kiralar** (kirayı ödeyen kişinin ömrünün sonuna kadar), ya da kira alacakları hiç bitmeyen olduğu durumda **daimi kiralar** söz konusudur.

Kiraların ödendiği periyotuna göre: yıllık, yarıyıllık, üç aylık, aylık vb. kiralar fark ediyoruz.

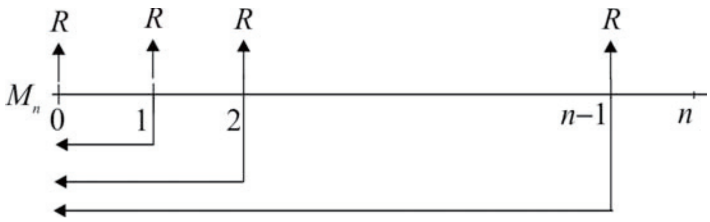
Kiranın alındığı müddetçe, parasal varlıkların faizlendirmesi devam eder ve kira periyotları ve faiz dönemleri çakışabilir, yani eşit olabilir (biz ilerde sadece bu gibi kiraları inceleyeceğiz). Halbuki faiz hesaplanması, kira periyotundan daha sık ya da daha seyrek de olabilir.

Kira almak için, önce bunu getirecek varlık temin edilmelidir. Kira getirmek amacıyla yatırılan varlık miktarına **kira sermayesi** denir. Burada bir defaya mahsus olan yatırım söz konusudur. Halbuki parasal varlıklar periyodik ödemelerle de yapılabilir. Kira alacakları, kira bedelinin yatırılmasıyla başlarsa **hemen kiralar**, kira alacakları belli bir zamandan sonra başlarsa o halde **ertelenmiş kiralar** söz konusu olur.

Sabit miktarlı, faizlendirme vadesi kiranın ödeme vadesiyle çakışan periyodik ödemeler üzerinde daha fazla duracağız. Formüllerin belirtilmesinde faiz oranı dönem sonu olduğunu varsayacağız, halbuki dönem başı durumlar için de yorumlar yapacağız. Şu işaretlemeleri kullanacağız: M_n – kira sermayesi, R- kira (rent), n – ödeme sayısı, r – dönem sonu faiz katsayısı, ρ - dönem başı faiz katsayısı.

3.6.1. Kira Sermayesinin Hesaplanması

Başlangıç için, n defa her periyodun başında ödenen R miktarlı dönem başı kirayı inceleyelim. Gereken kira sermayesini hesaplamak için bu miktar tüm kiraları sağlayacağını bilmemiz gerekir. Demek ki, yatırımların gelecekteki değerini hesaplarken, tüm faizlenmiş bireysel mevduatların toplamını belirttiğimiz gibi, burada da kira sermayesi aslında tüm bireysel iskontolanmış kiraların değerlerinin toplamına eşit olacaktır. **İskontolanmış değer**, aslında faizlendikten sonra R değerine biriken şimdiki değerdir. Bunu, zaman ekseninde şu şekilde gösterebiliriz (şek.8):



Şek. 8

O halde, dönem başı durumunda, *r* faiz katsayısıyla kira sermayesi için:

$$M_n = R + R\cdot\frac{1}{r} + R\cdot\frac{1}{r^2} + \ldots + R\cdot\frac{1}{r^{n-1}}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, birinci kira iskonto edilmez, onun değeri şimdiki ödenen değere eşittir. İkinci kira bir periyot için iskonto edilmiş ve bu şekilde $n - 1$ defa iskonto edilen son kiraya kadar devam edilir. Bu şekilde elde edilmiş olan ifadeyi

$$M_n = R\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right),$$

biçiminde yazalım. Parantez içinde olan kısım, ilk terimi 1 ve ortak çarpanı $\frac{1}{r}$. olan bir geometrik dizisinin ilk *n* teriminin toplamıdır. Mevduatlardan farklı olarak burada faiz katsayıları yerine $\frac{1}{r^k}$ **iskonto katsayısı** vardır. Formülü dönüştürmeye devam ediyoruz:

$$\boxed{M_n = R\cdot\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = R\frac{r\left(r^n - 1\right)}{r^n\left(r-1\right)} = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}\left(r-1\right)}}.$$

elde edilir.

Bu formülle dönem başı kiranın kira sermayesi hesaplanır, diğer deyişle, ilerdeki tüm ödemelerin şimdiki değerini hesaplamak için uygulanan formüldür.

Not 1. Üçüncü *i / i* tablo, birinci tablonun değerlerinin toplamından elde edildiği gibi, benzer şekilde dördüncü *i / i* tablo $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}$, şeklinden toplam gibi, $\mathrm{I}V_p^{n-1} = \mathrm{II}_p^1 + \mathrm{II}_p^2 + \ldots + \mathrm{II}_p^{n-1}$, yani 1'den *n* -1 kadar periyotlarında, aynı *% p p.a.(d)* faiz oranıyla hesaplanmış ikinci tablonun değerlerinin toplamıdır.

Buna göre kira sermayesi için şu formülü elde ediyoruz:

$$\boxed{M_n = R\left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1}\right)}.$$

1. Önümüzdeki her 4 yılın başlangıcında 10000 denar kira almak için, bugün ne kadar para yatırmalıyız? Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve faizin hesaplanması yılda bir defa olsun.

Kira sermayesinin hesaplanması gerekir. Toplam 4 kira $n = 4$, kira değeri $R = 10000$, yıllık faizlendirme $m = 1$ ve dönem sonu faiz katsayısı $1+\frac{6}{100}=1{,}06$ olduğunu biliyoruz.

O halde,

$$M_n = R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)} = 10000\cdot\frac{1{,}06^4-1}{1{,}06^3(1{,}06-1)} = 36730 \text{ denardır.}\blacklozenge$$

Not 2. Faizlendirme dönem başı olduğu durumda, faiz katsayısı $\rho=\frac{100}{100-p}$'dir ve kira sermayesi için şu formül geçerli olacaktır:

$$\boxed{M_n = R\frac{\rho(\rho^n-1)}{\rho^n(\rho-1)} = R\frac{\rho^n-1}{\rho^{n-1}(\rho-1)}}.$$

2. Önümüzdeki her 4 yılın başlangıcında 10000 denar dönem başı kira almak için, bugün ne kadar para yatırmalıyız? Faiz oranı %6 *p.a.(a)* ve faizin hesaplanması yılda bir defa olsun.

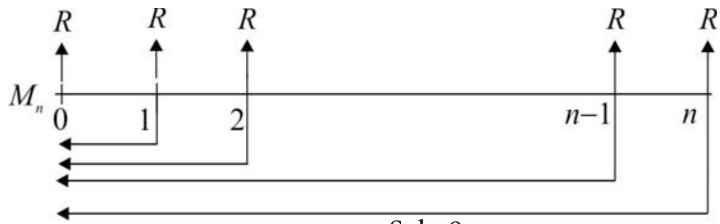
Ödev 1'de yapıldığı gibi, benzer şekilde hareket edilir, $\rho=\frac{100}{100-6}=1{,}063829787$ elde edilir. Bunu yukarıdaki formülde yerine koyarsak $M_n = 36542$ denar elde edilir.◆

3. Önümüzdeki 10 yıl boyunca yarım yılda bir 30000 denar kira almak istiyoruz. İlk kira hemen ödendiği takdirde, bugün ne kadar para yatırmalıyız? Faiz oranı %10 *p.a.(d)* ve faizin hesaplanması yılda iki defa olsun.

Birinci ödeme hemen olduğuna göre, dönem başı kira söz konusudur. Ödeme sayısı $n = 10.$ $2 = 20$, $R = 30000$ ve $r=1+\frac{10}{2\cdot 100}=1{,}05$ biliniyor. O halde

$$M_n = 30000\cdot\frac{1{,}05^{20}-1}{1{,}05^{19}(1{,}05-1)} = 392560 \text{ denar olduğunu buluyoruz.}\blacklozenge$$

Kira sayısı *n,* dönem sonu faiz katsayısı *r,* dönem sonu *R* değerinde kira olduğu durumda (şek.9):



Şek. 9

birinci kira, birinci periyodun sonunda ödenir ve aynısı bir periyot için iskonto edilir. İkinci kira iki peryiot için ve son kira n periot için iskonto edilir. O halde,

$$M_n = R\frac{1}{r} + R\frac{1}{r^2} + \ldots + R\frac{1}{r^{n-1}} + R\frac{1}{r^n} = R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{1}{r^n}\right) = R\frac{1}{r}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}},$$

ve sonunda $\boxed{M_n = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$ elde edilir. Bu ise, vade sonu kira sermayesinin hesaplanmasında uygulanan formüldür.

Not 3. Yukarıda yapılan incelemeye göre, dördüncü i / i tablosu için kira sermayesi formülü $\boxed{M_n = R \cdot \mathrm{IV}_p^n}$ şeklinde yazılır.

Not 4. Dönem başı faizlendirmede, dönem sonu kiralara ait formül:

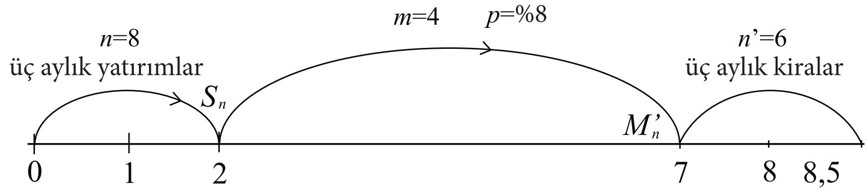
$\boxed{M_n = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$ dir.

4. Beş yıl boyunca, üç aylık vadeli 25000 denar tutarında dönem sonu kira almak için ne kadar kira sermayesi yatırmalıyız? Faiz oranı %10 *p.a.(d)* üç aylık vadelidir.

Kira sayısı n = 5. 4 = 20'dir, R = 25 000 ve $r = 1 + \frac{10}{4 \cdot 100} 1.025$ verilmiştir. O halde kira sermayesi için $M_n = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = 25000 \cdot \frac{1{,}025^{20} - 1}{1{,}025^{20}(1{,}025 - 1)} = 389730$ denar elde edilir.◆

5. Her üç ay sonunda 2 yıl boyunca periyodik mevduat yatırılmaya başlanmıştır. Bu günden 7 yıl sonra, üç ay vadeli, 6000 denar tutarında 1,5 yıl boyunca kira almak istiyoruz. Kira dönem başı, faiz oranı %8 *p.a.(d)* ve üç aylık faizlendirme ile verilecektir. Yatırılan periyodik mevduat ne kadardır?

Periyodik yatırımları ve alacakları zaman ekseninde gösterelim (şek.10).



Şek. 10

Verilenler, $n = 2 \cdot 4 = 8$, $r = 1 + \dfrac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$ yılın sonunda yatırımların toplam tutarı $S_n = V\dfrac{r^n - 1}{r-1} = \dfrac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1}V = 8{,}583V$ ‘dir. Yatırımın gelecekteki değeri, yani kiraların ödenmesi başlanıncaya kadar 5 yıl için faizlenir. Kira sermayesi, aslında S_n’in faizlenmiş değeridir. Buna göre, $M'_n = S_n \cdot r^{5\cdot 4} = 8{,}583V \cdot 1.02^{20}$,’dir. Sadeleştirdikten sonra M = 12,754V elde edilir. Diğer taraftan kiraların verilen koşullarına göre $M'_n = R \cdot \dfrac{r^{n'} - 1}{r^{n'-1}(r-1)}$, formülünde, kira sayısı n' = 1,5 • 4 = 6, r = 1,02, R = 6000 denar. Buna göre, $M'_n = 6000 \cdot \dfrac{1{,}02^6 - 1}{1{,}02^5(1{,}02 - 1)} = 34281$ elde edilir. Kira sermayesi için elde edilen iki değeri eşitlersek, 34 281 = 12,754 V elde edilir. Oradan da V = 2 688 denar olduğunu buluyoruz. ◆

Alıştırmalar

1. Periyodik kira nedir?

2. Ödemelerin süresine göre kiralar nasıl adlandırılır?

3. Ödeme zamanına göre nasıl kiralar vardır?

4. Dönem başı ödenen yarım yıl vadeli 5000 denar kira tutarını, 20 yıl boyunca almak için ne kadar kira sermayesi gerekir? Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve faiz vadesi yarım yıllık olsun.

5. Altı yıl boyunca %4 *p.a.(d)* faiz üzerinden 30000 denar yıllık vadeli
a) dönem sonu; b) dönem başı
kira almak için, bu gün yatırmamız gereken sermaye miktarı ne kadar olmalıdır?

6. Gelecek altı yılda, her üç ayın sonunda 30000 denar kira almak için, kira sermayesi ne kadar olmalıdır? Faiz oranı %2 *p.s.(d)* ve faiz vadesi üç aylıktır.

7. Bugün 80000 denar bankaya yatırıldı. İlerdeki 9 yıl zarfında her ay sonunda ne kadar para yatırmalıyız ki, ilerideki 10 yılda son mevduatın ödendiği günden itibaren, aylık dönem başı 7000 denar kira tutarı elde edilsin? Faiz oranı %12 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

8. Bu günden başlayarak ilerdeki üç yıl boyunca her ayın sonunda 5000 denar kira tutarı almak için bugün yatırılan 18000 denar ile beraber 2 yıl önce ne kadar para yatırmamız gerekirdi? Faiz oranı %24 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

3.7. Kira Tutarının Hesaplanması

Kira sermayesinin değeri M_n, faizlendirme ve kira alışının koşulları verilmiş, kira tutarı bilinmeyen olsun. Kira, dönem başı olduğu durumda kira sermayesi için $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$ geçerlidir. Bu ifadeden bilinmeyen R kira tutarını ifade edeceğiz. Oradan

$$\boxed{R = M_n \frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n - 1}}$$

elde edilir. Bu formülü kullanarak dönem başı kira tutarını hesaplayacağız.

Kira, dönem sonu olduğu durumda ise, kira sermayesi için $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$, formülü geçerlidir. Bu formülden

$$\boxed{R = M_n \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}$$

elde edilir.

1. Bugün 200000 denar %6 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlendirme ile bankaya yatırılmıştır. Bu kira sermayesi tutarıyla önümüzdeki 20 yıl boyunca her altı ayda bir kira

a) dönem sonu; b) dönem başı

olmak üzere alınırsa, kira tutarı ne kadar olacaktır?

M_n = 200000 denar kira sermayesi, R tutarlı n = 20. 2 = 40 kiraya eşit olmalıdır. Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \dfrac{6}{2 \cdot 100} = 1{,}03$ 'tür.

a) Dönem sonu kira durumunda $R = 200000 \cdot \frac{1{,}03^{40}(1{,}03-1)}{1{,}03^{40}-1} = 8652{,}5$ denardır.

b) Kira, dönem başı olduğu takdirde

$R = 200000 \cdot \frac{1{,}03^{39}(1{,}03-1)}{1{,}03^{40}-1} = 8400{,}5$ denardır.◆

Not 1. Faizlendirme dönem başı olduğu durumda kira

$$\boxed{R = M_n \frac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n-1}}$$

formülüyle hesaplanacaktır. ρ dönem başı faiz katsayısıdır.

Not 2. Faiz oranı dönem başı, kira dönem sonu olduğu durumda, kira

$$\boxed{R = M_n \frac{\rho^{n}(\rho-1)}{\rho^n-1}}$$

formülüyle hesaplanacaktır.

2. Bugün, çeyrek yıllık vadeli %12 *p.a.(d)* faiz oranıyla bankaya 100000 denar para yatırılıyor. Gelecek 10 yılda üç ay vadeli ne kadar kira alınabilir? Kiralar dönem sonu ve faizlenmesi dönem başı olacaktır.

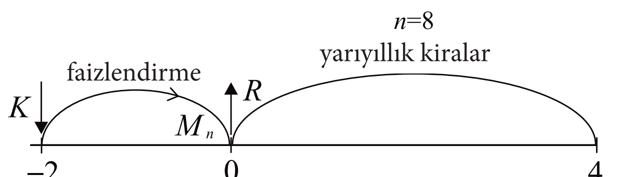
Ödevin verilerine göre M_n = 100000 denar, etkin faiz oranı %3 *p.q.(d)*, alınacak kira sayısı n = 10·4 = 40 olduğunu görüyoruz. O halde $\rho = \frac{100}{100-3} = 1{,}0309278$, 'dir ve kira tutarı için

$R = M_n \frac{\rho^n(\rho-1)}{\rho^n-1} = 100000 \cdot \frac{1{,}0309278^{40}(1{,}0309278-1)}{1{,}0309278^{40}-1} = 4391{,}36$ denar elde edilir. ◆

3. İki yıl önce bankaya 120000 denar %5 *p.a.(d)* yarı yıllık faizlendirmeyle yatırılan parayla, bu günden başlayarak 4 yıl boyunca, her altı ay başında ne kadar kira alabiliriz?

K = 120 000, r = 1,025, n = 4. 2 = 8'dir. Bu verilerle, kira her yarıyıl başında alındığına göre, dönem başı kira formülünü uyguluyoruz:

$$R = M_n \frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n-1} = M_n \frac{1{,}025^7(1{,}025-1)}{1{,}025^8-1} = 0{,}136 M_n .$$

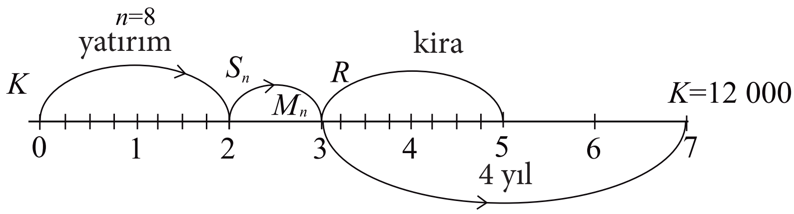


Şek. 11

Zaman ekseninde görüldüğü gibi, kira iki yıl ertelenmiştir ve 120000 denarlık kapital kira sermayesi olarak kullanıldığı ana kadar $M_n = K \bullet r^{22} = 120000 \cdot 1{,}025^4 = 132457{,}5$ ve $R = 0{,}136 \bullet 132457{,}5 = 18014$ denardır. ◆

4. Bu günden başlayarak önümüzdeki iki yıl boyunca, her üç ay sonunda 3000'er denar para yatırılacaktır. Yatırılan son taksitten bir yıl sonra başlayarak bu yatırımdan 2 yıl boyunca, her üç ayın başında kira ödenecektir. Banka hesabımızda bu günden yedi yıl sonra 12000 denar para biriktiğini varsayarak, kira tutarı ne kadar olacaktır? Faiz oranı %8 *p.a.(d)* faizlendirme üç aylık vadelidir.

Zaman eksenini çizdikten sonra işaret edelim (şek.12).



Şek. 12

$V_{dq} = 3000$, $n = 2 \cdot 4 = 8$, $r = 1 + \dfrac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$ ve $S_n = V\dfrac{r^n - 1}{r - 1} = 3000 \cdot \dfrac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1} = 25749$ denardır. Bu miktar para bir yıl faizde kalır ve kiraların toplam tutarını ve kalan 1200 denarın bedelini sağlar. Buna göre, $S_n r^4 = M + 12000 \cdot \dfrac{1}{r^{4 \cdot 4}}$ denklemini yazabiliriz. 12000 denar tutarının, dört yıl için üç ay vadeli iskontosu hesaplanır. O halde $S_n r^{20} = Mr^{16} + 12000$ elde edilir. Kira sermayesi M ile işaret edersek, kira sermayesi tutarı dönem başı üç aylık vadeli 8 kiraya denktir. O halde $M = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} = R\dfrac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02^7(1{,}02 - 1)} = R \cdot 7{,}472$ elde edilir. bunu yukarıdaki ifadede yerine değiştirirsek $25749 \cdot 1{,}02^{20} = R \cdot 7{,}472 \cdot 1{,}02^{16} + 12000$ ve sonunda $R = \dfrac{25749 \cdot 1{,}02^{20} - 12000}{7{,}472 \cdot 1{,}02^{16}} = 2560$ denar elde edilir.◆

Alıştırmalar

1. Bugün bankaya 100000 denar kira sermayesi ödedik. Önümüzdeki 8 yıl boyunca yatırılan para miktarıyla, %3 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlendirme ile dönem sonu yarıyıllık kira tutarı ne kadar olacaktır? Faizlendirme dönem başı, faiz oranı aynı %3 *p.a.(a)* olduğu durumda kira tutarı ne kadar olacaktır?

2. Bugün bankaya 150000 denar para yatırdık. Önümüzdeki 2,5 yıl boyunca yatırılan miktardan, her üç ay sonunda %8 *p.a.(d)* faiz oranı üzerinden ödenecek kira tutarı ne kadar olacaktır?

3. Bugün 90000 denar yatırdık. Bu yatırımdan dönem başı, üç aylık vadeli %8 *p.a.(d)* olmak üzere 3 yıl sonra başlayarak ilerdeki 5 yıl boyunca kira alacağız. Faiz oranı %10, üç aylık vadeli faizlendirme olduğuna göre, kira tutarı ne kadar olacaktır?

4. Biri 33. doğum gününden 38. doğum gününe kadar, her yarıyıl başında 4800'er denar banka hesabına yatırmıştır. Bu kişi 41. doğum gününden 48. doğum gününe kadar her yarıyıl sonunda alacağı kira tutarı ne kadardır? Yarıyıllık vadeli faizlendirme; faiz oranı %6 *p.a.(d)*'dir.

5. İki yıl önce 12000 denar para yatırdık ve 2,5 yıl sonra, her yarıyıl sonunda kira alacağız. Faiz oranı % 5*p.a.(d)* yarıyıllık faizlendirme uygulamakla alınacak kira tutarı ne kadar olacaktır?

3.8. Kira Sayısı ve Kira Kalanının Hesaplanması

Kira sermayesinin hesaplanmasında kullanılan formüldeki büyüklükler arasında, kira sayısı da bulunmaktadır. Kira sermayesi, kira tutarı ve faiz oranı bilindiğinde, kira sayısını ifade edebiliriz.

1. Altı aylık vadeli %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla 129442 denar kira sermayesi yatırılmıştır. İlk kira hemen alındığına göre bu sermayeyle 12000 denar tutarında kaç yarım yıllık vadeli kira alınabilir?

Kira sermayesi $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} = Rr\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$ formülüne birkaç denk dönüşüm uygulayarak:

$$\frac{M_n(r-1)}{Rr} = 1 - \frac{1}{r^n},$$

$$\frac{1}{r^n} = 1 - \frac{M_n(r-1)}{Rr} = \frac{Rr - M_n(r-1)}{Rr},$$

$$r^n = \frac{Rr}{Rr - M_n(r-1)}$$

elde edilir. Elde edilen denklemin iki tarafının logaritmasını alalım: $\log r^n = \log \frac{Rr}{Rr - M_n(r-1)}$, ve logaritma işleminin bir özelliğini kullanarak

$$n \cdot \log r = \log \frac{Rr}{Rr - M_n(r-1)}$$

elde edilir. Oradan da

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{Rr}{Rr - M_n(r-1)}}$$

elde edilir. Bu formülü kullanarak kira sayısını hesaplayacağız. Kira sayısını, doğrudan doğruya kira sermayesini hesaplamak için kullanılan formülden de elde edebiliriz.

Yukarıdaki ödeve yeniden dönelim. Birinci kira hemen alındığına göre, dönem başı kira söz konusu olduğunu önceden kaydedelim. Bilindiği üzere $M_n = 129442$, $r = 1 + \frac{4}{2 \cdot 100} = 1{,}02$, R = 1200 denardır. Buna göre kira sayısı

$$n = \frac{1}{\log 1{,}02} \cdot \log \frac{12000 \cdot 1{,}02}{12000 \cdot 1{,}02 - 129442 \cdot (1{,}02 - 1)} = 116{,}277 \cdot \log 1{,}268241 = 12\,.\blacklozenge$$

Not 1. Faiz oranı dönem başı ise, dönem başı yatırım için kira sayısı:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log \rho} \cdot \log \frac{R\rho}{R\rho - M_n(\rho - 1)}},$$

formülüyle hesaplanacaktır. Burada $\rho = 1 + \frac{100}{100 - p}$, dönem başı faiz katsayısıdır.

2. Bugün bankaya 140000 denar yatırıyoruz. Yatırılan paraya banka yıllık %5 *p.a.(d)* faiz ödüyor. Yatırılan bu parayla 10000 denar tutarında dönem başı yıllık kaç kira alabiliriz?

M_n = 140000, R = 10000 ve $r = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$ verilmiştir.

$$n = \frac{1}{\log 1{,}05} \cdot \log \frac{10000 \cdot 1{,}05}{10000 \cdot 1{,}05 - 140000(1{,}05 - 1)} = 22{,}517\,.\blacklozenge$$

Elde edilen değer tam sayı değildir. Bu ise şunu gösteriyor: Ödenen 22 kira ile yatırılan paranın tümü harcanmamıştır, fakat 10000 denar tutarında olan kiralardan 23. kirayı ödemek için yeterli para yoktur. O halde kira sayısı, elde edilen sayıdan büyük olan ilk doğal sayıdır, fakat ilk 22 kira tutarı eşit, son olan 23. kira diğerlerinden küçüktür.

Şek. 13

Son kira için ya da **kira kalanı** diye adlandırılan tutarı hesaplamak için formül bulacağız. Son kirayı R_0 ile işaret edelim. Bu durum zaman ekseni şek. 13'te gösterilmiştir. Kira sermayesinin bireysel kiralarını iskonto ederek:

$$M_n = R + R\cdot\frac{1}{r} + R\cdot\frac{1}{r^2} + \ldots + R\cdot\frac{1}{r^{n-2}} + R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}} = R\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^{n-2}}\right) + R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}$$

elde edilir. Parantez içindeki ifade bir sonsuz geometrik dizisinin ilk n terim toplamıdır. Buna göre:

$$M_n = R\cdot\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}} + R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}} = R\cdot\frac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}(r-1)} + R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}$$

elde edilir. Buradan da, kira kalanı için şu formülü elde ediyoruz:

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R\cdot\frac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}(r-1)}\right]\cdot r^{n-1}}.$$

Not 2. Bu ifadeyi dördüncü ve birinci *i* / *i* tablolarıyla ifade edersek, formül:

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R\cdot\left(1+\mathrm{I}V_p^{n-2}\right)\right]\cdot \mathrm{I}_p^{n-1}},$$

şeklinde yazılabilir. Burada $1+\mathrm{I}V_p^{n-2} = \dfrac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}(r-1)}$ dir.

Bizim örnekte $n = 23$ olduğuna göre:

$$R_0 = \left[140000 - 10000\cdot\frac{1{,}05\left(1{,}05^{22}-1\right)}{1{,}05^{22}(1{,}05-1)}\right]\cdot 1{,}05^{22} = 5231{,}75$$

denar elde edilir. Kira kalanı daima kira tutarından küçüktür.

M_n kira sermayesi, n defa alınmış olan dönem sonu kira R ve dönem sonu faiz katsayısı r verilmiş olsun. Kira sermayesi formülünden

$$\frac{M_n}{R}(r-1) = 1-\frac{1}{r^n},$$

$$\frac{1}{r^n} = 1-\frac{M_n}{R}(r-1) = \frac{R-M_n(r-1)}{R},$$

elde edilir. Buradan da

$$r^n = \frac{R}{R - M_n(r-1)}.$$

elde edilir. Bu ifadenin iki tarafının logaritmasını alalım:

$$\log r^n = \log \frac{R}{R - M_n(r-1)},$$

oradan da

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{R}{R - M_n(r-1)}}.$$

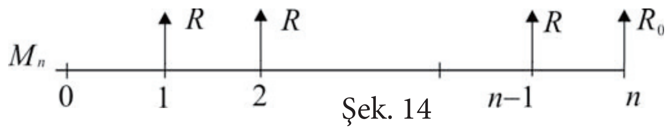
elde edilir.

Not 3. Verilen faiz oranı dönem başı olduğu durumda, kira sayısı için

$$\boxed{n = \frac{1}{\log \rho} \cdot \log \frac{R}{R - M_n(\rho-1)}}.$$

formülü geçerli olacaktır.

n tam sayı olduğu durumda, bu sayı alınacak kira sayısıdır, aksi halde tam sayı olmadığı durumda, kira sayısı bu sayıdan büyük olan ilk doğal sayı alınır. Dönem başı kiralar için yapıldığı gibi, burada da R_0 kira kalanı hesaplanabilir (şek.14).



Şek. 14

Kiraları iskontolayarak kira sermayesi için:

$$M_n = R \cdot \frac{1}{r} + R \cdot \frac{1}{r^2} + \ldots + R \cdot \frac{1}{r^{n-1}} + R_0 \cdot \frac{1}{r^n} = R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) + R_0 \cdot \frac{1}{r^n}$$

elde edilir. Parantez içindeki toplam, ilk terimi $\frac{1}{r}$ ve ortak çarpanı $\frac{1}{r}$ olan bir geometrik dizisinin toplamı olduğuna göre:

$$M_n = R \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1 - \frac{1}{r^{n-1}}}{1 - \frac{1}{r}} + R_0 \cdot \frac{1}{r^n} = R \cdot \frac{r^{n-1} - 1}{r^{n-1}(r-1)} + R_0 \cdot \frac{1}{r^n}.$$

elde edilir. Oradan da,

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R \cdot \frac{r^{n-1} - 1}{r^{n-1}(r-1)}\right] \cdot r^n}$$

elde edilir. Bu ifade, dönem sonu kira kalanını hesaplamak için formüldür.

Not 4. $\dfrac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}$ ifadesi $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, ile değiştirildiğine göre, *i / i* tablolarından yararlanmakla kira kalanı için şu formülü kullanacağız:

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R\cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right]\cdot \mathrm{I}_p^n},$$

Not 5. Kira kalanını hesaplamak için elde edilen formüllerde, faiz katsayısı *r*, dönem başı faiz katsayısı ρ ile değiştirilirse, dönem başı faizlendirme için karşılık gelen kira kalanı formülleri elde edilecektir.

3. Yıllık dönem sonu kira almak için, bugün bankaya 280000 denar yatırıyoruz. Faiz oranı %5 *p.a.(d)* yıllık olduğuna göre 20000 denar tutarında kaç kira alabiliriz? Son kira ne kadardır?

Şu veriler biliniyor: M_n = 280 000, kira *R*= 20 000 ve *r* = 1,05. *n* kira sayısını belirtmek istiyoruz. Yukarıdaki formüllerden:

$$n = \frac{1}{\log 1{,}05}\cdot \log \frac{20000}{20000 - 280000\cdot(1{,}05-1)} = 24{,}6765\,.$$

elde edilir. Buna göre, alınacak kira sayısı *n* = 25'tir. Halbuki burada kiralardan ilk 24 tanesinin tutarı eşit, son kira tutarı ise farklı ve 20000 denardan az olacaktır. O halde kira kalanını için:

$$R_0 = \left[280000 - 20000\cdot \frac{1{,}05^{24}-1}{1{,}05^{24}(1{,}05-1)}\right]\cdot 1{,}05^{25} = 13637{,}4$$ denar olduğunu buluyoruz.◆

Alıştırmalar

1. Bugün bankaya 910122,27 denar yatırdık ve bu günden başlayarak her üç ay sonunda 100 000 denar tutarında kira alacağız. Faiz oranı üç aylık vadeli %7 *p.a.(d)* olduğuna göre kaç kira alabiliriz?

2. Bugün bankaya 339318,67 denar yatırdık. Faiz oranı altı aylık vadeli %10*p.a.(d)* olduğuna göre, dönem başı altı ay vadeli 50000 denar tutarında kaç kira alabiliriz?

3. Bugün 500000 denar altı ay vadeli %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla bankaya yatırdığımız takdirde, bu günden başlayarak her altı ay sonunda 50000 denar tutarında kaç kira alabiliriz? Kira kalanı ne kadardır?

4. Bankaya yatırılan 1300000 denar para ile, üç aylık vadeli, dönem sonu 40000 denar tutarında kaç kira alabiliriz? Faiz oranı dönem sonu üç aylık vadeli %9 *p.a.(d)*'dir. Kira kalanı ne kadardır?

5. Bugün bankaya 120000 denar yatırdık ve bu günden başlayarak her altı ay başında 4800 denar tutarında kira alacağız. Faiz oranı altı aylık vadeli %4 *p.a.(d)* olduğuna göre kaç kira alabiliriz ve kira kalanı ne kadardır?

3.9. Periyodik Kiralarda Faiz Oranının Hesaplanması

Faiz oranı bilinmeyen, diğer büyüklükler ise biliniyorsa, onu kira sermayesi formülünden bilinmeyen büyüklük gibi hesaplanacaktır: dönem başı için $M_n = R\left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1}\right)$ ve dönem sonu için $M_n = R \cdot \mathrm{I}V_p^n$.

1. Hangi yıllık vadeli faiz oranıyla 600000 denar yatırılmalıdır ki, 25 yıl boyunca her yıl başı 50000 denar tutarında kira alınsın?

Dönem başı kiralara ait kira sermayesinin temel formülünü açalım. Amaç, *r* dönem sonu faiz katsayısının değerini bulmaktır.

$$M_n = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}, \text{buradan}$$
$$M_n r^n - M_n r^{n-1} = Rr^n - R,$$
$$(M_n - R)r^n - M_n r^{n-1} + R = 0.$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde bilinmeyen *r*'dir ve derecesi genellikle 4'ten büyüktür. Böyle denklemleri çözmek için sayısal yöntemler kullanılır ve bu yöntemlerin uygulanması hayli zordur. Halbuki, $M_n = R\left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1}\right)$, formülünü kullanarak, $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, finansal tablosundan değerleri okuyarak, *p* faiz oranını kolay belirtebiliriz. Halbuki $\mathrm{I}V_p^{n-1}$ tablosunda aranılan değer yoksa, bileşik faiz hesabında ve mevduatlarda yapıldığı gibi lineer enterpolasyon denilen yöntem uygulanır.

Konkre olarak, ödev 1 de M_n = 600000, *R* = 50000, *n* = 25'tir. Formülü uygulamakla $600000 = 50000 \cdot \left(1 + \mathrm{I}V_p^{24}\right)$ olduğuna göre $\mathrm{I}V_p^{24} = 11$ elde edilir. $\mathrm{I}V_p^{24}$ tablosunda 11 değeri hiçbir faiz oranına karşılık gelmediğini görüyoruz. Bu nedenle ona en yakın olan değerleri 10,9830 < 11 < 11,4693 alıyoruz. Bu durumda $\mathrm{I}V_{7,5}^{24} = 10{,}9830$ ve $\mathrm{I}V_7^{24} = 11{,}4693$ olduğunu buluyoruz. Şu tabloyu oluşturuyoruz:

$\mathrm{I}V_p^{24}$	p	$\mathrm{I}V_p^{24}$	p
10,9830	7,5	10,9830	7,5
11,4693	7	11	p
0,4863	$-0,5$	0,017	$p-7,5$

0,4863: (- 0,5) = 0,017: (p - 7,5) orantısından $p=\dfrac{-0,5\cdot 0,017}{0,4863}+7,5=7,482\%$ elde edilir. Demek ki aranılan faiz oranı % 7,482'dir.◆

2. Bir kişi, 5 yıl boyunca her yarıyıl sonunda 60000 denar kira alıyormuş. Kira sermayesi, ilk alınan kiradan altı ay önce yatırıldığına göre, altı ay vadeli faizlendirme hangi faiz oranıyla yapılmıştır?

Burada dönem sonu kira tutarı R = 60000, kira sermayesi tutarı M_n = 463 302, n = 5. 2 = 10 defa verilmiştir. Dönem sonu kiraya ait kira sermayesi formülü $M_n=R\dfrac{r^n-1}{r^n(r-1)}$ dir. Bu eşitliği r faiz katsayısına göre düzenlersek $M_n r^{n+1} - (M_n + R)r^n + R = 0$ denklemi elde edilir. Bizim örneğimizde bu denklem 11. derecedir ve bunun çözümünü belirtmek kolay değildir. Bu nedenle finansal tablolarda $M_n=R\cdot \mathrm{I}V_{\frac{p}{2}}^{n}$, kira sermayesinin formülünden yararlanacağız. $\dfrac{p}{2}$ yarıyıllık vetkin faiz oranıdır. Demek ki, $463302=60000\cdot \mathrm{I}V_{\frac{p}{2}}^{10}$ olduğuna göre $\mathrm{I}V_{\frac{p}{2}}^{10}=7,7217$ elde edilir. Tabloda n =10 için 7,7217 sayısına $\dfrac{p}{2}$ = %5 karşılık gelir. Buna göre yıllık nominal faiz oranı %10 *p.a.(d)* olduğunu buluyoruz.◆

3. 12 yıl 6 ay boyunca yarıyıllık faiz vadesiyle, dönem sonu altı aylık 10000 denar tutarında kira almak için, 12000 denar kira sermayesini hangi faiz oranıyla yatırmalıyız?

Formülde M_n = 120 000, R = 10000 ve kira sayısı n = 12,5. 2 = 25 değerlerini değiştirirsek $120000=10000\cdot \mathrm{I}V_{\frac{p}{2}}^{25}$, denkleminden $\mathrm{I}V_{\frac{p}{2}}^{25}=12$ elde edilir. Dördüncü i / i tablosunda n = 25 için 12 sayısını değil, ona en yakın komşuluğunda bulunan iki sayıyı seçiyoruz. Bunlar 12,1979 sayısı, ki buna %6,5 faiz oranı ve 11,6536 sayısı ki buna %7 faiz oranı karşılık gelir.

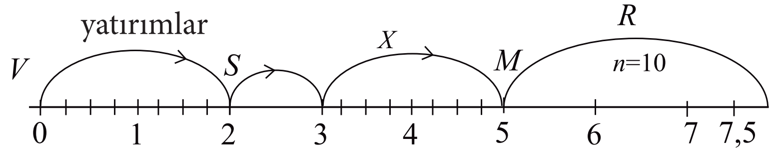
Bu verileri tabloda yazarak enterpolasyon yapacağız.

0,5443: (- 0,5) = 0,3464: (p /2 - 7,5) orantısından $\dfrac{p}{2}=\dfrac{-0,5\cdot 0,3464}{0,5443}+7=\%6,682$ elde edilir. Buna göre yıllık nominal faiz oranı 13,364 *p.a.(d)* dir.◆

$\mathrm{I}V^{25}_{p/2}$	$p/2$	$\mathrm{I}V^{25}_{p/2}$	$p/2$
11,6536	7	11,6536	7
12,1979	6,5	12	$p/2$
0,5443	– 0,5	0,3464	$p/2-7$

4. Bugünden başlayarak ilerdeki iki yıl boyunca, her üç ayın sonunda 16000 denar para bankaya yatıracağız. Bu günden üç yıl sonra hesabımızdan o kadar para çekmeliyiz ki beş yıl sonra hesabımızda kira sermayesi olarak 30840 denar paramız birikmiş olsun. Bu kira sermayesinden yaralanarak 2,5 yıl boyunca 4000 denar tutarında dönem sonu üç ay vadeli kira alacağız. Bu günden üç yıl sonra hesabımızdan hangi miktar parayı çekmeliyiz? Faiz oranı bu zaman süresinde daima aynıdır.

İki yıllık yatırım yapılıyor, fakat faiz oranını bilmediğimizden mevduatın tutarını hesaplayamıyoruz. Halbuki kira için verilerimiz vardır ve oradan faiz oranını hesaplayacağız. Bu verileri zaman ekseni üzerinde gösterdikten sonra denklemler kuracağız.



Şek. 15

S yatırımının son değeri bir yıl faizlenir, X tutarında para çekilir ve kalan para daha iki yıl faizlenir. Bugünden 5 yıl sonraki günde, bankada biriken para tutarı, kiraların toplam tutarına karşılık gelir. Buna göre $(S \cdot r^4 - X) \cdot r^8 = M$ denklemi elde edilir. Önce faiz oranını hesaplayalım. Kira sermayesi formülünden $M = R \cdot \mathrm{I}V^{n}_{\frac{p}{4}}$, yazabiliriz, burada n kira sayısıdır ve örneğimizde n = 2,5 · 4 =10 kiradır. Buna göre $\mathrm{I}V^{n}_{\frac{p}{4}} = 7{,}71$ elde edilir. Bu değer $\frac{p}{4}$ =%8 faiz oranına karşılık gelir. Demek ki, p = %32 *p.a.(d)* olduğunu buluyoruz. Buna göre $r = 1 + \frac{32}{4 \cdot 100} = 1{,}08$ değerini X ‘in bulunduğu denklemde yerine koyabiliriz. Yatırım dönem sonu olduğuna göre $S = 16000\frac{1{,}08^8 - 1}{1{,}08 - 1} = 170186$ denar elde edilir. O halde, $(170186 \cdot 1{,}08^4 - x) \cdot 1{,}08^8 = 30840$ denklemi elde edilir. Bunun çözelim, 231536 – X = 16662 oradan da X = 231536 – 16662 = 214874 denar olduğunu buluyoruz.

Çekilmesi gereken miktar 214874 denardır.◆

Alıştırmalar

1. On yıl boyunca her üç ayın başlangıcında 10000 denar tutarında kira alınmıştır. İlk alınan kiranın ilk gününde 200000 denar para yatırılmışsa, üç ay vadeli hangi faiz oranı kullanılmıştır?

2. 12 yıl boyunca her üç ayda bir 2000 denar dönem başı kira almak için, 70000 denar hangi faiz oranıyla yatırılmalıdır? Faizlendirme her üç ayda bir yapılacaktır.

3. Altı yıl boyunca her altı ayda 6000 denar tutarında dönem sonu kira almak için, 45216 denar kira sermayesi, hangi faiz oranıyla yatırılmalıdır?

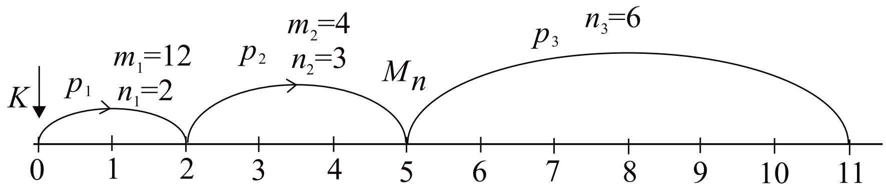
4. Bir kişi 36000 denar yatırım yaparak ilerdeki 5 yıl boyunca, her dördüncü ayda 4500 denar tutarında kira almalıdır. Dört ay vadeli hangi faiz oranı kullanılmıştır?

5*. Bir yıl önce yatırılan tutarın şimdiki değeri 45000 denardır ve her ikinci ay sonunda bu paradan iki yıl boyunca 5000 denar tutarında kira alınacaktır. Kira iki ay vadelidir. Bir yıl önce hangi miktar para yatırılmıştır?

3.10. Karma Ödevler

i / i tablolarının uygulanmış olduğu bazı çözülmüş ödevler üzerinde duracağız.

1. Bugün ne kadar kapital yatırmalıyız ki, bu günden başlayarak 5 yıl sonraki altı yıl boyunca her üç ay başında 9000 denar tutarında kira almak için yatırımımız olsun. Faizler: ilk iki yılda aylık vadeli %6 *p.s.(d)* faiz oranıyla, sıradaki üç yılda üç ay vadeli %10 *p.a.(a)* faiz oranıyla ve son altı yılda faiz oranı %4 *p.q.(d)* hesaplanacaktır (şek.15).



Şek. 16

Kira sermayesi, aslında anaparanın faizlenmiş tutarıdır ve farklı periyotlarda farklı faiz oranlarına göre şu şekilde hesaplanacaktır:

- İlk iki yıl 2 · 12 = 24 defa, $r = 1 + \dfrac{2 \cdot 6}{12 \cdot 100} = 1{,}01$, faiz katsayısıyla faizlenecek,

- Sıradaki 3 yılda 3 · 4 =12 defa $\rho = \dfrac{100}{100 - \dfrac{10}{4}} = 1{,}02564$, faiz katsayısıyla ve

- Kiraların hesaplanmasında, toplam 6 · 4 =24 kira, üç aylık vadeli %4 etkin faiz oranıyla, ya da *r'* = 1,04 faiz katsayısıyla faizlenecektir.

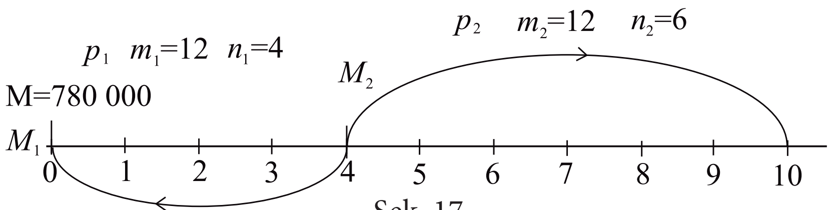
Buna göre, $K \cdot r^{24} \cdot p^{12} = M_n$ ve $M_n = R \cdot r' \dfrac{r'^{24} - 1}{r'^{24}(r' - 1)}$ dir. Verilen değerleri değiştirdikten sonra elde edilen ifadeleri eşitliyoruz. Bu şekilde

$$K \cdot 1{,}01^{24} \cdot 1{,}02564^{12} = 9000 \cdot 1{,}04 \frac{1{,}04^{24} - 1}{1{,}04^{24}(1{,}04 - 1)},$$

denklemi elde edilir. İfadenin sadeleştirilmesiyle 1,72 K = 142 712 elde edilir. Buna göre bugün ödenmesi gereken tutar *K* = 82 972 denar olduğunu buluyoruz.◆

2. Banka hesabımıza 780000 denar tutarında kira sermayesi yatırıyoruz. Faiz oranı ilk 4 yıl boyunca %6 *p.a.(d)* ve gelecekteki altı yıl boyunca %8 *p.a.(d)* olmak üzere, on yıl boyunca ayda ne kadar kira alınabilir? Faizlendirme işlemi aylık ve ilk kira, kira sermayesinin yatırıldığından bir ay sonra başlayacaktır.

Önce, ilk kira ödemesi ay sonunda yapıldığına göre, dönem sonu kiradan bahsedildiğini fark edelim. Farklı faiz oranları uygulandığından, aynı tutarlı fakat farklı kira sermayesi ile, ilk 4 yılda bir, ikinci 6 yılda ikinci kira ödendiğini farz edebiliriz (şek.17)

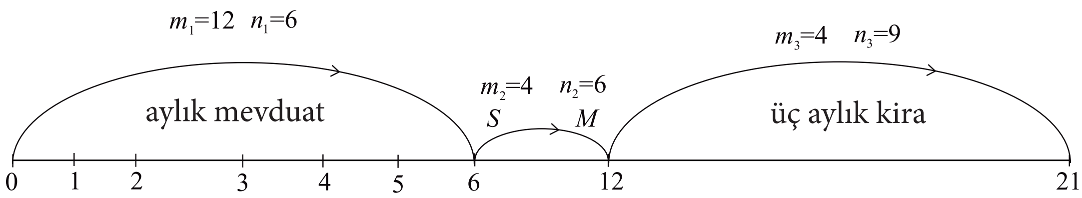


Şek. 17

İlk dört yıl için gereken kira sermayesi M_1 ve ilerdeki 6 yıl için M_2 olsun. Ödenen toplam kira sermayesi tutarı M_1 ve iskontolanmış M_2 tutarlarının toplamıdır. Birinci kira 4. 12 = 48 defa, dönem sonu faiz katsayısı $r_1 = 1 + \dfrac{6}{12 \cdot 100} = 1{,}005$ ile hesaplanacaktır ve elde edilen kira sermayesi $M_1 = R \cdot \dfrac{1{,}005^{48} - 1}{1{,}005^{48}(1{,}005 - 1)} = 42{,}580R$ 'dir. İkinci kira 6. 12 = 72 defa, dönem sonu faiz katsayısı $r_2 = 1 + \dfrac{8}{12 \cdot 100} = 1{,}00667$ olduğuna göre, ikinci kira sermayesi $M_2 = R \cdot \dfrac{1{,}00667^{72} - 1}{1{,}00667^{72}(1{,}00667 - 1)} = 57{,}028R$ dir. O halde $M = M_1 + M_2 \cdot \dfrac{1}{r_1^{4 \cdot 12}}$, eşitliğinden

$780000 = 42{,}580R + 57{,}028R \cdot 1{,}005^{-48}$, denklemi elde edilir. Denklemi çözerek aylık kira R = 8917 denar olduğunu elde ediyoruz.◆

3. Dokuz yıl boyunca üç ay vadeli 18000 denar tutarında kira almak istersek, her ay başında 6 yıl boyunca ne kadar mevduat yatırılmalıdır? Son yatırılan mevduattan ilk kira alınıncaya kadar 6 yıl 1 ay geçecektir. Faiz oranı %8 *p.a.(d),* faizlendirme ilk 6 yılda aylık vadeli, ondan sonra üç aylık vadeli olacaktır (şek.18).



Şek. 18

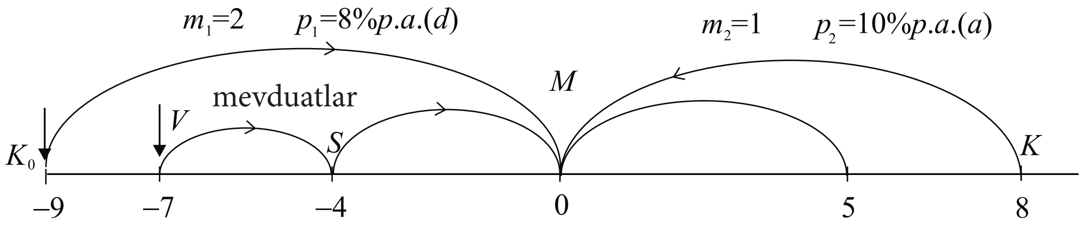
Bilinmeyen, bireysel mevduat *V*'dir. Mevduat toplam 6. 12 = 72 defa dönem başıdır. Altıncı yıl sonunda $r_1 = 1 + \dfrac{8}{12 \cdot 100} = 1{,}00667$ faiz katsayısıyla yatırımların son tutarı *S* hesaplanır. Buna göre, $S = V \cdot r_1 \dfrac{r_1^{72} - 1}{r_1 - 1} = V \cdot 1{,}00667 \dfrac{1{,}00667^{72} - 1}{1{,}00667 - 1} = 92{,}65V$ elde edilir. *S* tutarına, kira sermayesi olduğu andan itibaren faizlendirmeye başlanır. Son mevduattan ilk kiranın ödenmesine kadar 6 yıl 1 ay süre vardır, fakat S son mevduattan bir ay sonra hesaplanmaya başlıyor. Demek ki, faizlendirme süresi 6 yıldır. O halde, *S* tutarını belirttikten sonra faizlendirme üç aylık vadeli olduğuna göre $M = S \cdot r_2^{6 \cdot 4}$,'dir. Bu durumda r_2 faiz katsayısı için $r_2 = 1 + \dfrac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$ elde edilir. Buna göre kira sermayesi için $M = S \cdot 1{,}02^{24} = 92{,}65 \cdot 1{,}02^{24} V = 149V$ elde edilir.

Diğer taraftan, kira sermayesini kiranın koşullarına göre hesaplayacağız. Kira her üç ay vadeli 9 yıl boyunca alınır. Demek ki, ilk üç ayın başlangıcından başlayarak, yani dönem başı toplam n = 9. 4 = 36 kira ödenir. Faiz katsayısı r_2 = 1,02'dir. Buna göre,

$$M = R \cdot r_2 \frac{r_2^{36} - 1}{r_2^{36}(r_2 - 1)} = 18000 \cdot 1{,}02 \frac{1{,}02^{36} - 1}{1{,}02^{36}(1{,}02 - 1)} = 18000 \cdot 26 = 468000\,.$$

elde edilir. Kira sermayesinin iki değerini eşitleyerek 149 V = 468 000 elde edilir. Buna göre, V = 3 141 denardır.◆

4. Biri 9 yıl önce banka hesabına 38000 denar yatırmıştır. İlk iki yılda başka yatırım ve para çekme olmamıştır. Ondan sonra 3 yıl boyunca her 6 ayda 8000 denar tutarında mevduatlar yatırılmıştır. Bu günden başlayarak ilerdeki 4 yıl boyunca yıllık vadeli 15000 denar tutarlı kira alınacaktır. Bu güne kadar yarıyıllık vadeli faiz oranı %8 *p.a.(d),* bu günden itibaren ise yıllık vadeli faiz oranı %10 *p.a.(d)* uygulandığına göre, son kiradan sonra kişinin banka hesabında ne kadar parası olacaktır? (şek. 19).



Şek. 19

Ödenen mevduatların faizlenmiş değerlerini, gereken kira sermayesi ve iskonto kalanı K ile eşitleyeceğiz. Bu güne kadar faiz katsayısı $r_1 = 1 + \dfrac{8}{2 \cdot 100} = 1{,}04$ tür. Yatırılan ilk mevduat tutarı K_0 = 38000 denardır ve bugüne kadar yarıyıllık vade ile toplam 9. 2 =18 defa faizlenir. 3·2 = 6 defa yatırılan mevduatın toplam tutarı $S = V \cdot r_1 \dfrac{r_1^6 - 1}{r_1 - 1} = 8000 \cdot 1{,}04 \dfrac{1{,}04^6 - 1}{1{,}04 - 1} = 55186$ denardır ve bu tutar bugüne kadar faizlenir ve bu şekilde bugüne kadar yatırılan paranın toplam tutarı

$$K_0 \cdot r_1^{18} + S \cdot r_1^{4\cdot 2} = 38000 \cdot 1{,}04^{18} + 55186 \cdot 1{,}04^8 = 152507 \text{ denardır.}$$

Banka hesabından ilerde çekilen parasal değerleri hesaplamak için, kira ve kalanın iskontolanmış değerini hesaplamak gerekir. Son kiradan sonra, 4 yıl faizde kalan dönem başı yıllık vadeli mevduat söz konusu olduğunu belirtmeliyiz. Bu demektir ki son kiradan dört yıl sonra, bugünden ise 8 yıl sonra için kalan para tutarını hesaplayacağız. O halde, dönem başı faiz katsayısı $\rho_2 = \dfrac{100}{100 - 10} = 1{,}11$ olduğuna göre, K kalanının iskontolanmış değeri $K \cdot \dfrac{1}{\rho_2^8}$, dir. O halde kira sermayesi için $M = R \cdot \rho_2 \cdot \dfrac{\rho_2^5 - 1}{\rho_2^5(\rho_2 - 1)}$, geçerlidir. Beş yıllık dönem başı yıllık vadeli 15000 denar kira tutarı için

$$M = 15000 \cdot 1{,}11 \cdot \frac{1{,}11^5 - 1}{1{,}11^5(1{,}11 - 1)} = 61537 \text{ denar elde edilir.}$$

Şimdiye kadar yapılan yatırımları ve alımları eşitlemekle $K_0 \cdot r_1^{18} + S \cdot r_1^{8} = M + K \cdot \dfrac{1}{\rho_2^{8}}$, $152507 = 61537 + K \cdot 1{,}11^{-8}$ elde edilir ve oradan $K = 39\,474$ denar olduğunu buluyoruz. Bu günden sekizinci yılın sonunda banka hesabında 39 474 denar kalacaktır.◆

Alıştırmalar

1. 11 yıl önce banka hesabımıza, yarıyıllık vadeli 4 yıl boyunca 8000 denar tutarında mevduatlar yatırmaya başladık. 3 yıl önce bir defaya mahsus daha 90000 denar yatırdık. Bugünden başlayarak yedi yıl boyunca aylık kiralar alacağız ve 49 aydan sonra hesabımızda daha 50000 denar kalacaktır. Faiz oranı, bugüne kadar yarıyıllık vadeli %8 *p.a.(d)* ve bu günden sonuna kadar aylık vadeli %12 *p.a.(d)* olduğuna göre kira tutarı ne kadardır? Kiralar ve mevduatlar dönem başıdır.

2. 12 yıl önce bankaya bir miktar para yatırdık. Ondan üç yıl sonra, 5 yıl boyunca her altı ayda 3000 denar tutarında mevduatlar yatırdık. Bu günden başlayarak 8 yıl boyunca altı ay vadeli 5000 denar tutarında kira alacağız. Son kiradan 1 yıl 6 ay sonra banka hesabımızda daha 4000 denar paramız olacaktır. Bugüne kadar faiz oranı %8 *p.a.(d)* ve bugünden sonra p = %6 *p.a.(d)* altı ay vadeli olduğuna göre 12 yıl önce ne kadar para yatırılmıştır? Hem mevduatlar, hem kiralar dönem başıdır.

3. Üç yıl önce başlayarak iki yıl boyunca banka hesabımıza her ay dönem başı 2000 denar tutarında mevduat yatırmaya başladık. Bir yıl önce daha 40000 denar yatırıldı. Bu günden bir yıl sonra 5 yıl boyunca R tutarında dönem başı aylık kira alacağız ve bu günden 6 yıl sonra bir yıl boyunca 2200 denar tutarında dönem başı aylık kira alacağız. Faiz oranı %13 *p.a.(d)* olduğuna göre beş yıllık kira tutarı ne kadar olacaktır? Faizlendirme bir aylık vadelidir.

4. Bir kişi 30 yıl önce başlayarak onuncu yıl önceye kadar her ay başında %24 *p.a.(d)* faiz oranıyla aylık vadeli 1100 denar tutarında mevduat yatırmıştır. O günden sonra faiz oranı %4 *p.a.(d)* altı ay vadeli faizlendirme uygulanmıştır. Bu günden başlayarak ilerdeki 15 yıl boyunca, kişi her altı ayda kira alıp son kirayı aldıktan sonra hesabında 50000 denar kalıyorsa yarıyıl vadeli kira tutarı ne kadardır?

5. Biri yedi yaşından 15 yaşına kadar her üç ayın başında banka hesabına 7000 denar yatırmıştır. 20. yaşında bir defaya mahsus daha 200000 denar para yatırmıştır. 30 ve 40 yaş arasındaki dönemde her üç ay başında 125000 denar tutarında kira almıştır. Faiz oranı %8 *p.a.(d)* üç ay vadeli olduğuna göre, ellinci yılında şahsın banka hesabında ne kadar parasal varlığı olacaktır?

3. 11. Alıştırmalar

1. Bu günden başlayarak 1 yıl ve 8 ay boyunca her ay başında 1200 denar tutarında mevduat yatıracağız. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* aylık vadeli faizlendirme ile bu günden üç yıl sonra hesabımızda ne kadar para birikecektir?

2. İki yıl önce banka hesabımıza 40000 denar para yatırdık. Şimdiden 4 yıl sonra hesabımızda 80000 denar birikmesi için, ilerdeki üç yıl boyunca her ay sonunda ne kadar mevduat yatırmalıyız? Faiz oranı %18 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

3. 4500 denar tutarında üç ay vadeli kaç mevduat yatırmalıyız ki, son mevduattan 3 ay sonra hesabımızda 120000 denar para birikmiş olsun? Faiz oranı %10 ve faiz vadesi üç aylıktır.

4. Bir kişi 35 yaşından başlayarak 41 yaşına kadar her altı ay sonunda 6000 denar tutarında para banka hesabına yatırıyor ve son yatırım gününde hesabında 144000 denar olduğunu tespit ediyor. Faizlendirme altı aylık olduğuna göre, yatırım hangi faiz oranıyla yatırılmıştır?

5. Biri, banka hesabına her üç ay başında 6000 denar tutarında mevduat yatırmış ve bugünden 4 yıl sonra hesabında 314422 denar para birikmiştir. Bugün dahil, kişi kaç yıl hesabına üç ay vadeli 6000 denar tutarında para yatırmıştır? Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve faizlendirme üç ay vadelidir.

6. 20 yıl boyunca çeyrek yıl vadeli dönem sonu 7200 denar tutarında kira almak için bugün hangi miktar parayı yatırmalıyız? Faiz oranı %8 *p.a.(d)* ve faizlendirme üç ay vadelidir.

7. Bu günden başlayarak ilerdeki iki yıl boyunca, her ay sonunda 2500 denar tutarında mevduat yatırılıyor. Bu günden 4 yıl sonra başlayarak ilerdeki iki yıl boyunca her ay başında ne kadar kira alabiliriz? Faiz oranı %12 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

8. Bugün hesabımıza 100000 denar para yatırdık. Altı aylık vadeli dönem başı 10000 denar tutarında kirayı bugünden başlayarak kaç defa alabiliriz? Faiz oranı %5 *p.a.(d)* altı aylık vadelidir. Kira kalanı ne kadardır?

9. Bugün 115610 denar yatırdık ve bir ay sonra başlayarak, ilerdeki iki yıl boyunca her ay sonunda 9000 denar tutarında kira almaya başlayacağız. Faizlendirme aylık vadeli olduğuna göre faiz oranı ne kadardır?

10. Bugün hangi miktar parayı yatırmalıyız ki, 5 yıl sonra hesabımızda 59008 denar paramız kira sermayesi olarak birikmiş olsun. Bu paradan 3 yıl boyunca her üç ay sonunda 1200 denar tutarında kira ödenecektir.

11. 10 yıl önce banka hesabımıza 50000 denar para yatırdık. Dört yıl sonra her ay başında 800 denar tutarında 6 yıl boyunca periyodik yatırımlara başladık. Bugünden başlayarak 2 yıl boyunca her ay başında 3000 denar tutarında aylık kira alacağız. Son kiradan yarım yıl sonra hesabımızdan daha 197650 denar alıyoruz. Bu günden 3 yıl sonra banka hesabımızda ne kadar paramız kalacaktır? Faiz oranı %10 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

12. Bir baba çocuğunun tasarruf karnesine, 8 yaşından 15 yaşına kadar her ay sonunda 500 denar yatırıyor; 18 yaşından 24 yaşına kadar her ay başında 600 denar yatırıyor. Ondan sonra 26 yaşından 1,5 yıl boyunca her ay başında 250 denar yatırıyor. Faiz oranı %10 *p.a.(d)* aylık vadeli olduğuna göre, son yatırımdan altı ay sonra çocuğun karnesinde ne kadar parası olacaktır?

13. On iki yıl önce bir miktar para yatırılmış ve bugün 30000 denar çekilmiştir. Bugünden başlayarak ilerdeki 6 yıl zarfında, her dört ay sonunda 500 denar tutarında para yatırılmıştır. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* dört ay vadelidir. Bu günden 12 yıl sonra hesabımızda 208790 denar olduğuna göre, 12 yıl önce ne kadar para yatırılmıştır?

14. Birkaç yıldan bugüne kadar her üç ay başında 12000 denar para yatırılmıştır ve bugünden dört yıl sonra banka hesabında 175400 denar birikmiştir. Faiz oranı %12 *p.a.(d)* üç ay vadelidir. Paranın yatırılması kaç yıl önce başlamıştır?

15. Biri 80000 denar para yatırmıştır. 2,5 yıl sonra her üç ay başında kira almaya başlayacaktır. 2,5 yıl boyunca ne kadar kira alabilir? Faiz oranı %12 *p.a.(d)* üç ay vadelidir.

16. Bu günden bir yıl üç ay sonra, hangi miktar parayı yatırmalıyız ki, yatırım gününden bu günden 3 yıl sonraya kadar, her ay sonunda 4500 denar tutarında kira alınsın ve son kira alındığı günde hesapta 11250 denar para kalsın? Faiz oranı %12 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

17. Biri 5 yıl önce 24000 denar yatırmış ve bugünden ilerdeki iki yıl boyunca her altı ay başında 38330 denar para yatıracaktır. Faiz oranı daima aynı altı aylık vadeli olmak üzere, son yatırımda hesapta 400000 denar biriktiğini varsayarsak, bu günden 5 yıl sonra kişinin hesabında ne kadar parası olacaktır?

18. Bugün banka hesabına 150000 denar yatırılmış, iki yıl sonra 60000 denar hesaptan çekilmiştir. Bu günden onuncu yıla kadar, dönem sonu yıllık kira alacağız ve son kiradan 3 yıl sonra hesabımızda 30000 denar kalacaktır. Faiz oranı %5 *p.a.(d)* yıllık vadeli olduğuna göre kira tutarı ne kadardır?

19. Bir kişi 20 yaşından başlayarak 30 yaşına kadar her üç ayda banka hesabına 3000'er denar yatırarak tasarruf yapmıştır. 40 yaşına geldiğinde hesabından 40000 denar para çekmiştir. Bu kişi 45 yaşından 50 yaşına kadar 3 aylık vadeli kira alacaktır. Son kirayı aldığında banka hesabında 100000 denar para kalacaksa, kira tutarı ne kadar olacaktır? Faiz oranı %8 *p.a.(d)* üç aylık vadelidir.

20. Bugünden 3 yıl sonra, her yarım yıl sonunda 2,5 yıl boyunca 8000 denar tutarında kira almak için kişi, bugünden başlayarak ilerdeki üç yıl boyunca, her yarım yıl başında ne kadar para yatırmalıdır? Faiz oranı %10 *p.a.(d)* altı aylık vadelidir.

Konu Özetleri

Basit ve bileşik faiz hesaplarını uygularken, sadece bir defaya mahsus olmak üzere yatırılan parasal varlıklar ve bazı örneklerde farklı periyotlarda yatırılan ya da çekilen tutarlar söz konusuydu. Bu durumda, bireysel yatırımlar eşit ya da farklı olabilirdi, belli bir kurala göre değişebilir, örnek aritmetik ya da geometrik dizisi kanununa göre artar ya da azalabilir veya tasarrufta olduğu gibi belli bir kanuna uymadan gelişigüzel değişebilir. Halbuki, çoğu kez yatırımlar belli bir kanuna göre, aynı zaman aralıklarında tekrarlanabilir yatırımlara rastlıyoruz. Böyle durumlarda söz konusu **mevduattır.** Mevduat belli bir süre sonunda veya istenildiğinde çekilmek üzere bankalara faizle yatırılan paradır. Mevduatlar belli sürelerde aynı miktarlarda yatırıldığı durumda sabit mevduatlar diye de adlandırılıyorlar.

Yatırımlar, ödemeler serisinin başlama noktasına göre **dönem başı** ve **dönem sonu mevduatlar** olarak ikiye ayrılıyorlar. Yatırım esnasında her mevduatın faizi, yatırıldığı günden tüm mevduatların toplam değerinin hesaplandığı ana kadar hesaplanır. Dönem başı ya da dönem sonu faizlendirme uygulanabilir. Mevduat vadesi ve faiz vadesi bazı durumlarda aynı, bazı durumlarda ise farklı, yani mevduat vadelerinden daha sık ya da daha seyrek olabilirler. Pek sık tüm mevduatların toplam değeri ne kadardır sorusu sorulmaktadır. Yatırım esnasında faizi hesaplanmış tüm mevzuatların toplamına yatırımın **gelecekteki değeri** denir.

Değişmeyen mevduatlarla olan ve kiraların yatırımlarla denk gelen periyodik yatırımları inceleyeceğiz.

Yıl esnasında sadece bir mevduat ödendiği durumda, söz konusu **yıllık mevduat** olur, yatırım yılda iki defa yapıldığında, **altı aylık (yarım yıllık) mevduat**, yılda dört defa yatırım yapıldığında **üç aylık (çeyrek yıllık) mevduat** biçiminde adlandırılır. Yatırım ayda bir yapılırsa **aylık mevduat** olur. Burada da faizlendirme vadesi yıllık, altı aylık, üç aylık vb. olabilir.

Dönem başı faizlenmiş yatırımların toplamı şu formülle hesaplanır:

$\boxed{S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{S_n = V\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}}$ dönem başı faizlendirme.

$\boxed{S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}}$ dönem başı faizlendirme.

Dönem başı faizlenmiş yatırımların değeri şu formülle hesaplanır:

$\boxed{V = S_n\frac{r - 1}{r(r^n - 1)}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{V = S_n\frac{\rho - 1}{\rho(\rho^n - 1)}}$ dönem başı faizlendirme.

Dönem sonu faizlenmiş yatırımların değeri şu formülle hesaplanır:

$\boxed{V = S_n\frac{\rho - 1}{\rho^n - 1}}$ dönem başı faizlendirme.

$\boxed{V = S_n\frac{r - 1}{r^n - 1}}$ dönem sonu faizlendirme için,

Dönem başı yatırımların sayısı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Vr + S_n(r - 1)}{Vr}}.$$

Dönem sonu yatırımların sayısı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{V + S_n(r - 1)}{V}}.$$

Son mevduat diğerlerinden farklıdır ve ona **yatırımın kalanı** denir.
Dönem başı mevduatların son mevduatı (kalanı) şu formülle hesaplanır:

$\boxed{V_0 = \frac{1}{\rho}S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}$ dönem başı mevduatlar için,

$\boxed{V_0 = S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}$ dönem sonu mevduatlar için.

Dönem sonu mevduatların son mevduatı şu formülle hesaplanır:

$\boxed{V_0 = \frac{S_n}{r} - Vr\frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} = \frac{1}{r}S_n - V\frac{r^n - r}{r - 1}}$ dönem başı mevduatlar için,

$$\boxed{V_0 = S_n - Vr\frac{r^{n-1}-1}{r-1} = S_n - V\frac{r^n - r}{r-1}}$$ dönem sonu mevduatlar için.

Dönem başı yatırımların, dönem sonu faizlendirmesiyle biriken gelecekteki değeri hesaplamak için kullandığımız $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r-1}$, formülünde, S_n ve V bilindiğinde, bilinmeyen r faiz katsayısını, yani %*p p.a.(d)* değerini hesaplamak için

$$\boxed{r^{n+1} - \left(\frac{S_n}{V} + 1\right)r + \frac{S_n}{V} = 0}$$

denklemi elde edilir. Bu ise r katsayısına göre bir polinom denklemidir ve genel olarak derecesi 3'ten büyüktür. Bu gibi denklemleri çözmek için (bazı özel durumlar hariç), belli bir kural yoktur. Bu nedenle, bu gibi denklemleri bilinen bazı nümerik yöntemlerle çözeceğiz. Halbuki, amacımız şimdi nümerik yöntemlerin denklemlerin nasıl çözüldüğünü öğrenmek değildir. Burada sadece pratik ödevlerin yararına faiz oranını en kolay biçimde belirtmektir. Bu nedenle faiz oranının hesaplanmasını *i / i* tablolarındaki değerleri kullanan $S_n = V \cdot \mathrm{III}_p^n$ formülüne göre yapacağız.

Aynı işlemleri dönem sonu yatırımlar için de yapacağız. Yatırımların gelecekteki değeri $S_n = V\frac{r^n - 1}{r-1}$, formülünden, faiz katsayısı r için:

$$\boxed{r^n - \frac{S_n}{V}r + \frac{S_n}{V} - 1 = 0},$$

denklemi elde edilir. Bu denklem de r değişkenli polinomdur. Yatırımların gelecekteki değerini hesaplamak için *i / i* tablolarındaki değerleri kullanan $S_n = V\left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)$, formülünden yararlanarak $\mathrm{III}_p^{n-1} = \frac{S_n}{V} - 1 = \frac{S_n - V}{V}$. elde edilir. n – 1'in bilinen değeri için $\frac{S_n - V}{V}$ değeri tabloda varsa, faiz oranı doğrudan doğruya okunur. Aksi halde, faiz oranını doğrusal enterpolasyon ile belirtiyoruz.

Eşit zaman aralıklarında alınan alacaklar söz konusu olunca ilk aklımıza gelen **kiradır**. Eşit miktarda alacakları **sabit kiralar** (**rentler**) diye adlandıracağız. Kira anüiteleri önceden belirlenmiş kanuna göre değişebilir, örneğin geometrik ya da aritmetik dizisi kanununa göre değişebilir. Böyle kiralara **değişken kiralar** denir. Özelliklerine göre kiralar birçok şekilde adlandırılıyorlar; ödeme zamanına göre, periyodun başlangıcında ödenirse **dönem başı kiralar**, periyodun sonunda ödenirse **dönem sonu kiralar** diye adlandırılıyorlar. Ödemelerin zaman süresine göre **geçici kiralar** (belli bir süre için), **ömür boyu kiralar** (kirayı ödeyen kişinin ömrünün sonuna kadar), ya da kira alacakları hiç bitmeyen olduğu durumda **daimi kiralar** söz konusudur. Kiraların ödendiği periyotuna göre: **yıllık, yarıyıllık, üç aylık, aylık** vb. kiralar fark ediyoruz.

Kira almak için, önce bunu getirecek varlık temin edilmelidir. Kira getirmek amacıyla yatırılan varlık miktarına **kira sermayesi** denir. Burada bir defaya mahsus olan yatırım söz konusudur. Halbuki parasal varlıklar periyodik ödemelerle de yapılabilir. Kira alacakları, kira bedelinin yatırılmasıyla başlarsa **hemen kiralar**, kira alacakları belli bir zamandan sonra başlarsa o halde **ertelenmiş kiralar** söz konusu olur.

Sabit miktarlı, faizlendirme vadesi kiranın ödeme vadesiyle çakışan periyodik ödemeler üzerinde daha fazla duracağız. Formüllerin belirtilmesinde faiz oranı dönem sonu olduğunu varsayacağız. Şu işaretlemeleri kullanacağız: M_n – kira sermayesi, R- kira (rent), n – ödeme sayısı, r – dönem sonu faiz katsayısı, ρ - dönem başı faiz katsayısı.

Dönem başı kiraların yatırımı şu formülle hesaplanır:

$\boxed{M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{M_n = R\dfrac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho-1)}}$ dönem başı faizlendirme için.

Dönem sonu kiraların yatırımı şu formülle hesaplanır:

$\boxed{M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{M_n = R\dfrac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho-1)}}$ dönem başı faizlendirme için.

Faiz yatırımının değeri M_n, faizlendirme koşulları ve kira sayısı bilindiği durumda, kira tutarının değeri şu formülle hesaplanır:

$\boxed{R = M_n\dfrac{r^{n-1}(r-1)}{r^n - 1}}$ dönem sonu faizlenen dönem başı alınan kira için,

$\boxed{R = M_n\dfrac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}$ dönem sonu faizlenen dönem sonu alınan kira için.

$\boxed{R = M_n\dfrac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n - 1}}$ dönem başı faizlenen dönem başı alınan kira için,

$$\boxed{R = M_n \frac{\rho^n(\rho-1)}{\rho^n - 1}}$$ dönem başı faizlenen dönem sonu alınan kira için.

Kira sermayesi, kira tutarı ve faiz oranı bilindiğinde, dönem başı kira sayısı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{Rr}{Rr - M_n(r-1)}}$$ dönem sonu faiz oranı için,

$$\boxed{n = \frac{1}{\log \rho} \cdot \log \frac{R\rho}{R\rho - M_n(\rho-1)}}$$ dönem başı faiz oranı için.

Kira sermayesi, kira tutarı ve faiz oranı bilindiğinde, dönem sonu kira sayısı da şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{R}{R - M_n(r-1)}}$$ dönem sonu faiz oranı için,

$$\boxed{n = \frac{1}{\log \rho} \cdot \log \frac{R}{R - M_n(\rho-1)}}$$ dönem başı faiz oranı için.

Son kira, yani kira kalanı dönem sonu kiralar için şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R \cdot \frac{r^{n-1} - 1}{r^{n-1}(r-1)} \right] \cdot r^n}.$$

Diğer büyüklükler bilindiğinde, faiz katsayısı dönem başı kira için $M_n = R\left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1}\right)$ formülünden ve dönem sonu kiralar için $M_n = R \cdot \mathrm{I}V_p^n$ formülünden bilinmeyen gibi hesaplanabilir.

4. BORÇLAR

4.1. Borç Kavramı ve Çeşitleri

Finansal varlıkların yetmediği durumlarda, insanlar günlük gereksemelerini gidermek için borç varlıklardan yararlanıyorlar. Bazı durumlarda bireysel ya da tüzel kişilerin uzun vadeli gelirleri de planladığı işleri yapmak için gereken finansal kaynakları yetmeyebilir. Böyle durumda **borçlar** kullanılır**,** yani belli koşullar altında borç alınan finansal varlıklardan yararlanılır. Borç veren ve alan, borç miktarı, geri verilme şekli, geri ödeme zamanı, faiz oranı vb. hususlarda aralarında anlaşıyorlar.

Borç, para, mal veya para cinsinden bir değerin belirli bir vade ve koşulla geri alınmak üzere verilmesidir, yani borç veren, finansal varlıklarını borç alana geçici bir süre için hizmetine devretmesidir.

Bu bölümde, borçlunun borcunu ödeme koşulları, borç verene olan yükümlülüğü, yani finansal varlıkların devredilme koşulları, borcun süresinde faizlendirmeyi içeren, anlaşmalar söz konusu olacaktır. Borç tutarı genellikle birden verilir ve geri alınması birden değil, çok kez belli periyotlarda gerçekleştirilir. Her periyotta borcun ödendiği tutara **ödeme** denir. Belli periyotta ödemenin faiziyle beraber tutarına **anüite** denir; diğer sözlerle anüite, belirli bir zaman süreci içerisinde, eşit aralıklarla verilen veya alınan eşit ödemeler serisidir. Borcun her bireysel ödemesine gereken zaman süresine **amortisman vadesi** denir.

Kullanılışlarına göre, geçerlilikte olan kanunlara göre, süresine göre birçok borç çeşitleri vardır.

- Geri ödenme süresine göre **kısa vadeli** (geri ödeme süresi en çok bir yıl), **orta vadeli** ve **uzun vadeli** diye adlandırılıyorlar;
- Ödeme şekline göre borçlar, **amortismanlı** ve **kiralı** olabilirler. Borç belli bir sürede faiz ve borcun bir kısmını ödemekle geri ödeme yapıldığı durumda, amortismanlı borç söz konusu olur. Kiralı borçlar ise, kira şeklinde ödenen sabit tutarlı taksitler halinde ödenen borçlardır.
- Güvenceye göre, **kişisel** ve **reel** borçlar olabilir. Kişisel borçlar, borç verenin borç alana olan şahsi güvencesine göre verilir. Reel borçlar ise, borcun ödenmesini garantileyecek, örneğin ipotek gibi varlıklar güvencesiyle verilir.
- Borç verene göre **yerli** ya da **yabancı** borçlar, **aleni** ya da **özel**, **banka** ya da **banka dışı** vb. borçlar olabilir.
- Borç üzerine faizin ödenip ödenmediğine göre **faizli** ve **faizsiz** borçlar şeklinde adlandırılabilir.

- Borçlanmaya ait verilen belgelere göre, borçlar **sözleşmeli** (borç tutarının tümü için bir belge) ve **tahvillere (senetlere) bölünmüş borçlar** (birden fazla alacaklıya, aynı ya da farklı tutarlı kısımlara ayrılmış fakat onların toplam tutarı tüm borç ile eşit olacaktır).
- Anüitelerin ödeme süresine göre, **dönem sonu anüiteli** borçlar (ödemeler serisi devrenin sonunda yapılan) ve **dönem başı anüiteli** borçlar (ödemeler devrenin başında yapılan anüiteler)
- Faizin hesaplanmasına göre borçlar, **dönem sonu faizlenen** ve **dönem başı faizlenen** biçiminde adlandırılabilir.

Mevduatlarda ve kiralarda olduğu gibi borçlar da, dönem sonu anüiteli ve dönem başı faizlendirme, dönem sonu anüiteli dönem sonu faizlendirme biçiminde olabilir. Aynı şekilde dönem başı anüiteler için de dönem sonu ve dönem başı faizlendirme biçiminde olabilirler.

Borçların amortismanı birçok farklı şekilde yapılabilir. Uzun vadeli borçlarda vade süresince sadece faizlerin, vadenin sonunda da borcun tamamını bir defada ödemek ya da her bir taksit hem anaparanın bir bölümünü hem de ilgili devrelerin faizini içerir.

Şunu da belirtelim, **borcun amortismanı** denilen kademeli ödemede, önceden belirlenmiş tutarlarla, belli zaman aralıklarında, önceden belirlenmiş bir plan üzerinde, ödenmesine **amortisman planı** denir. Halbuki amortisman planını yapmak için, bazı verilerin kesin bilinmesi gerekir. Mesela Hangi zamanda ne kadar ödenmesi gerektiğini, borcun ne kadarı kaldığını, ne kadar faiz hesaplandığını bu verilerin her biri nasıl hesaplanacağını da belirtmek gerekir.

Ödemeler ve anüiteler sabit ya da belli bir kurala göre, örneğin aritmetik ya da geometrik dizisi kuralına göre değişen olabilir. Biz şimdilik, sabit anüiteli borçları inceleyeceğiz. Çünkü bunlar pratikte daha sık rastlanan ve borcu ödeme süresinde belli aralıklarda taksitlere ayırarak ödenmesi borçlu için daha elverişlidir. Borç eşit ödemelerle tahsil edildiği durum borçluya pek elverişli değildir, çünkü borcu aldığı anda, büyük anüite ile ödemeye başlaması gerekir. Faizlendirme vadesi de anüitenin ödeme vadesiyle çakışabilir ya da çakışmayabilir de.

İlerde sadece eşit anüiteli borçları ve yuvarlanmış anüiteli borçları ve her iki durumda dönem sonu anüiteleri ve dönem sonu faizlendirmesi yapılan ve faizlendirme vadesi ve amortisman vadesiyle çakışan borçları inceleyeceğiz. Diğer durumlar benzer şekilde hesaplanacaktır.

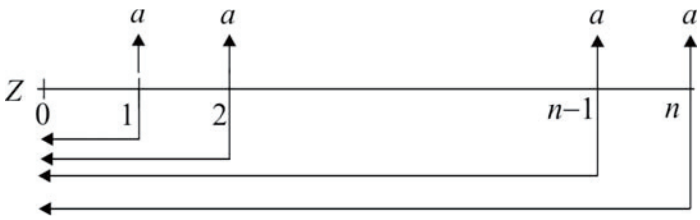
Sonunda, tüm bireysel anüitelerin iskontolanmış değerlerinin toplamı, borcun alındığı gündeki değerine eşit olduğunu diyebiliriz. Bu ise kiralarda kira sermayesinin hesaplandığını hatırlatıyor. Bu sonuçtan yararlanarak, amortisman planındaki büyüklüklerin nasıl hesaplanacağını artık biliyoruz.

Alıştırmalar

1. Ödeme nedir, anüite nedir, amortisman vadesi nedir?
2. Borçların nasıl ayrıldığına dair dört kriter sayınız?
3. Borcun süresine göre borçlar nasıl ayrılır, ödeme şekline göre ise nasıl ayrılırlar?
4. Amortisman planı nedir?
5. Bireysel ve reel borçlar arasındaki fark nedir?
6. Amortisman ve kira borçları arasındaki fark nedir?

4.2. Eşit Anüiteli Borçlarda, Borcun ve Anüitenin Hesaplanması

Tutarı Z olan bir borç alınmış ve geri ödemesi, her biri a tutarında n eşit anüite ile yapılacaktır. Faiz oranı p dönem sonu faizlendirme ve faiz dönemi anüitelerin ödeme dönemiyle çakışık olsun. Dönem sonu faiz katsayısı r, her faiz dönemi için ayrı hesaplanmış, yani etkin faiz (efektif faiz) yapılmıştır. Borcun alındığı günde, borcun tutarı, her dönemin sonunda ödenen, bireysel anüitelerin iskontolanmış değerlerinin toplamına eşittir. Sayı ekseninde, kira sermayesinin hesaplandığında, kiralarda yapıldığı gibi, her anüitenin ödeme dönemi (periyodu) işaret edilir (şek.1).



Şek. 1

İskontolama kurallarıyla, anüitelerin değerleri bilindiğine göre borcun tutarını hesaplayalım. Birinci anüite ilk devrenin (periyodun) sonunda ödendiğine göre bir devre için faizlenir, ikincisi iki devre için ve bu şekilde sonuna kadar devam edilerek son anüite n defa faizlenir. Bu şekilde:

$$Z = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \ldots + \frac{a}{r^n} = \frac{a}{r}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

elde edilir.

Parantez içindeki ifade, ilk terimi 1 ve ortak çarpanı $\frac{1}{r}$ olan bir geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamıdır. O halde,

$$Z = \frac{a}{r}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{a}{r}\frac{\frac{r^n-1}{r^n}}{\frac{r-1}{r}}, \text{ ve } \boxed{Z = a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}}$$

elde edilir.

Not 1. Kiralar bölümünde gördüğümüz gibi, $\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$ ifadesi *i / i,* IV_p^n dördüncü tablonun değeriyle değiştirilebilir. O halde, anüiteleri bilinen borcu $\boxed{Z = a \cdot \mathrm{I}V_p^n}$, formülüyle hesaplayabiliriz. Bu formül kiraların sermayesini hesapladığımız formülün aynısı olduğunu görüyoruz.

Aynı formülden, anüiteye göre denklem biçiminde çözersek, Borç tutarı bilindiğinde anüitenin hesaplanması için formül elde edebiliriz:

$$\boxed{a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}}.$$

Not 2. *i / i* tablolarının değerlerinden yararlanarak anüite için $a = \frac{Z}{\mathrm{I}V_p^n}$ formülü elde edilir. Beşinci *i / i* tablo dördüncüsünün çarpımsal tersi olarak tanımlanır, $V_p^n = \frac{1}{\mathrm{I}V_p^n}$, yani $V_p^n = \frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$ dir. Buna göre anüite için $\boxed{a = Z \cdot V_p^n}$ formülü geçerlidir.

1. 5000 denar tutarında aylık eş anüitelerle beş yılda, bir ay vadeli dönem sonu %24 *p.a.(d)* faiz oranıyla ne kadar borç ödenebilir?

Ödevde verilen verilere göre, $n = 5$ ve yılda $m = 12$ faizlendirme ve yılda aynı sayıda borç ödeme taksitleri vardır. O halde toplam taksit sayısı $nm = 60$, dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{24}{12 \cdot 100} = 1{,}02$ 'dir. Borcu hesaplayan formül gereğince $Z = a\frac{r^{60}-1}{r^{60}(r-1)} = 5000 \cdot \frac{1{,}02^{60}-1}{1{,}02^{60}(1{,}02)-1} = 173804{,}43$ denar elde edilir. ◆

Bundan sonra, m ile yıllık faizlendirme sayısını işaret ettiğimiz gibi, aynısı anüite sayısı için de geçerli olacaktır. Çünkü amortisman devreleri, başlangıç koşullarına göre anüite sayısıyla çakıştığını demiştik ve n ile amortisman süresini işaret edeceğiz.

2. 40000 denar tutarında borç, altı aylık vadeli anüitelerle %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla 10 yılda ödeniyor. Faizlendirme altı aylık vadeli olduğuna göre, altı aylık vadeli anüite tutarı ne kadardır? Hesaplanan faiz tutarı ne kadardır?

Verilenler: $n = 10$, $m = 2$, anüite devreleri altı aylık olduğuna göre toplam anüite sayısı $nm = 20$'dir. Faiz katsayısı $r = 1 + \frac{4}{200} = 1{,}02$ dir. Borç tutarı $Z = 40000$ denar biliniyor. Amortisman süresinde eşit olan anüiteler için

$a = Z\frac{r^{20}(r-1)}{r^{20}} = 40000\frac{1{,}02^{20}(1{,}02-1)}{1{,}02^{20}} = 2447{,}27$ denar elde edilir.

Hesaplanan faiz miktarı, ödenen anüitelerin toplamı ve borç tutarının farkına eşittir. O halde $I = nm \cdot a - Z = 20 \cdot 2447{,}27 - 40000 = 8945{,}4$ denardır.◆

Amortisman süresinde hesaplanan faiz miktarının formülü, $I = nm \cdot a - Z$ anüitelerin toplam tutarı ve borç tutarının farkı biçiminde gösterildiğini fark edebilirsiniz.

3. 2000000 tutarında bir borç, 10 yılda % 6 *p.a.(d)* faiz oranıyla eşit anüiteli serisiyle ödenir. Ödeme vadesi

a) yıllık; b) yarıyıllık; c) üç aylık

olduğuna göre, anüite tutarını hesaplayınız.

Faizlendirme dönemi, amortisman dönemiyle çakışıktır.

Her üç durumda $Z = 2000000$ denar, $n = 10$'dur.

a) $m = 1$, $m = 1$, $r = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$, anüite sayısı 10 biliniyor. O halde

$$a = Z\frac{r^{10}(r-1)}{r^{10}} = 2000000\frac{1{,}06^{10}(1{,}06-1)}{1{,}06^{10}} = 271735{,}92$$

Beşinci i / i tablosundan ($V_6^{10} = 0{,}135867{,}96$) yararlanarak çözümün yoklamasını yapınız.

b) Ödevi sadece *i/i* tablosundan yararlanarak çözeceğiz. Formülden,

$a = Z \cdot V_3^{20} = 2000000 \cdot 0{,}06721571 = 134431{,}42$ elde edilir.

Yoklamasını doğrudan doğruya hesaplamakla ve dördüncü *i/i* tablosundan yararlanarak yapınız.

c) $m = 4$ için $r = 1 + \frac{6}{400} = 1{,}015$, ve anüite sayısı 40 biliniyor. O halde

$a = Z\frac{r^{40}(r-1)}{r^{40}} = 2000000\frac{1{,}015^{40}(1{,}015-1)}{1{,}015^{40}} = 66854$ denardır.◆

Alıştırmalar

1. Sekiz yıl boyunca %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 15000 denar tutarlı eşit anüiteli ödemelerle ne kadar borç ödenebilir? Faizlendirme vadesi amortisman devresiyle çakışır. Anüitelerin ödeme devresi:

a) yıllık; b) yarıyıllık; c) üç aylık olsun.

Hesaplamayı formül kullanarak doğrudan ve *i / i* tablosunu kullanarak yapınız.

2. Dört yıl boyunca %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 10000 denar tutarlı eşit anüiteli ödemelerle ne kadar borç ödenebilir? Faizlendirme vadesi yıllık, amortisman vade sonudur.

3. 400000 denar borç 15 yıl boyunca, her altı ayda eşit anüitelerle geri ödenmelidir. Faiz oranı %3 *p.a.(d)* ve faizlendirme altı aylık dönem sonu olduğuna göre anüite tutarı ne kadar olmalıdır?

4. Yıllık vadeli 20000 denar tutarında anüitelerle 5 yılda %4 *p.a.(d)* yıllık vadeli faiz oranıyla ne kadar borç ödenecektir?

5. 50000 denar borç, 5 yılda üç aylık %8 *p.a.(d)* faiz oranlı anüitelerle ödenecektir. Anüite tutarı ne kadardır? Faizlendirme üç aylık vadelidir.

4.3. Eşit Anüiteli Borçların Ödemelerinin Hesaplanması

Her anüite iki kısımdan olduğunu artık biliyoruz; birinci kısım, anlaşma gereği borcun ödeme miktarı, yani bir çeşit taksit, diğer kısmı ise borcun kalan kısmına geçen süre için uygulanan faizdir. Z tutarında borç alınmış ve bunu n eşit anüite ile geri çevirmek gerekir. Her anüitenin tutarı a, faiz oranı p ve dönem sonu faizlendirme, faizlendirme vadesi anüitenin ödeme vadesiyle çakışıktır. Her k-cı ödemeyi b_k ve k-cı faizi i_k ile işaret edersek birinci anüite

$$a = b_1 + i_1$$

olur. Burada faiz, birinci dönem için Z tüm borç tutarına hesaplanır, yani $i_1 = \frac{Zp}{100}$'dir.

Başlangıçta, faiz oranı bir faiz dönemi için p olarak alacağız, ondan sonra ise etkin faiz oranını kullanmaya dikkat edeceğiz.

İkinci anüite, birincisine eşit, fakat eklenen faiz miktarı farklıdır $a = b_2 + i_2$. Şimdi faiz miktarı borcun kalan kısmına aittir, o ise $Z - b_1$ olduğuna göre $i_2 = \frac{(Z - b_1)p}{100}$'dir.

Üçüncü anüite $a = b_3 + i_3$, ve $i_3 = \frac{(Z - b_1 - b_2)p}{100}$, olur, çünkü şimdiye dek artık iki ödeme yapılmıştır ve kalan borç $Z - b_1 - b_2$ dir.

Kalan anüitelerin her birini bu şekilde inceleyerek son anüiteye $a = b_n + i_n$ varıyoruz. Burada faiz borcun kalan kısmına $Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_n$ uygulanır, yani $i_n = \frac{(Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_{n-1})p}{100}$ 'dir.

Ödemeler arasındaki bağıntıyı belirtmek için, birbirine eşit olan anüiteleri eşitleyeceğiz. Böylece birbirine eşit olan ilk iki anüiteyi eşitlersek $b_1 + i_1 = b_2 + i_2$ yani $b_1 + \frac{Zp}{100} = b_2 + \frac{(Z - b_1)p}{100}$ elde edilir.

Oradan $b_1 + \frac{b_1 p}{100} = b_2$ ya da diğer şekilde yazılışı:

$b_2 = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_1 r$ dir.

Benzer şekilde, herhangi iki ardışık anüiteyi mesela, k – ci ve $k + 1$ – ci anüiteleri eşitlersek:

$$b_k + \frac{(Z - b_1 - \ldots - b_{k-1})p}{100} = b_{k+1} + \frac{(Z - b_1 - \ldots - b_{k-1} - b_k)p}{100},$$

elde edilir. Bu eşitliği sadeleştirerek, her $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ için:

$\boxed{b_{k+1} = b_k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_k r}$, elde edilir.

Son ifadeden görüldüğü gibi, ödemeler ilk terimi b_1 ve ortak çarpanı r faiz katsayısı olan bir geometrik dizisini oluşturuyorlar. Daha da, her ödeme $b_k = b_1 r^{k-1}$ formülüyle hesaplanabilir.

Not 1. Birinci *i / i* tabloyu kullanırsak herhangi ödeme için $\boxed{b_k = b_1 \cdot \mathrm{I}_p^{k-1}}$. formülü geçerlidir.

1. Borç, eşit üç aylık vadeli anüite ile ve üç aylık vadeli faizlendirme ile ödenecektir (amortisman olacaktır). Dokuzuncu ödeme 2343,322 denar olduğuna göre beşinci ödemeyi belirtiniz. Faiz oranı %8 *p.a.(d)*'dir.

$b_9 = 2343,322$ biliniyor, b_5 ödemesinin tutarını belirtmek gerekir. Geometrik dizisinin özelliğine göre $b_5 = b_1 r^4$ ve $b_9 = b_1 r^8$ dir. Faiz katsayısı $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$ dir. İncelenen ödemelerin bölümleri $\frac{b_9}{b_5} = \frac{b_1 r^8}{b_1 r^4} = r^4$, olduğundan beşinci ödeme:

$b_5 = \frac{b_9}{r_4} = \frac{2343{,}322}{1{,}02^4} = 2164{,}87$ denar olduğunu buluyoruz.◆

Birinci ödeme tutarı bilinmiyor, fakat borç yada anüite tutarı biliniyorsa; zaten günlük yaşantımızda çok sık rastlanan olaylardır, ödemeler nasıl belirlenebilir sorusu soruluyor. Z borcunun ödemelerini belirtmek için, Z tüm ödemelerin toplamına eşit olduğunu görmemiz yeterlidir. Buna göre,

$$Z = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 r + b_1 r^2 + \ldots + {}_1^{-1} = {}_1 (1 + r + r^2 + \ldots + {}^{-1}),$$

elde edilir. Parantez içindeki ifade ilk terimi 1 ve ortak çarpanı r olan bir geometrik dizisidir. Buna göre,

$$\boxed{Z = b_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}}$$

elde edilir.

Not 2. $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ ifadesini $1 + \mathrm{III}_p^{n-1}$, ile değiştirirsek

$$\boxed{Z = b_1\left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)}$$

elde edilir. Bu eşitlikten $b_1 = Z\frac{r - 1}{r^n - 1}$, ödeme tutarını, borç tutarıyla, anüite sayısıyla ve faiz oranıyla ifade edebiliriz:

Bunu genel şekilde, k- cı ödeme için de yazabiliriz:

$$\boxed{b_k = Z\frac{r - 1}{r^n - 1} r^{k-1}}.$$

Borç tutarını $Z = a\frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$, anüite ile ifade edersek, birinci ödemeyi anüite ile ifade eden formülü elde edeceğiz:

$$b_1 = Z\frac{r - 1}{r^n - 1} = a\frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}\frac{r - 1}{r^n - 1}$$

ya da sonuç olarak $\boxed{b_1 = \frac{a}{r^n}}$ elde edilir.

Not 3. Son eşitlikten hemen $\boxed{b_1 = a \cdot \mathrm{II}_p^n}$, ya da

$$a = b_1 \cdot \mathrm{I}_p^n$$

yazılabilir.

Sonunda anüite ile ifade edilmiş *k*- cı ödeme $\boxed{b_k = \frac{a}{r^n} r^{k-1} = \frac{a}{r^{n-k+1}}}$.

Not 4. Son eşitlik finansal tablolarıyla ifade edilirse, k–cı ödeme için $\boxed{b_k = a \cdot \mathrm{II}_p^{n-k+1}}$. biçiminde yazılabilir.

Anüite ve son ödeme arasındaki bağıntı $b_n = \frac{a}{r} = a \cdot \mathrm{II}_p^1$, ya da $a = b_n \cdot \mathrm{I}_p^1$. formülleriyle ifade edildiğini de görebilirsiniz.

2. Bir borç, yarıyıllık vadeli eşit tutarlı anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faizlendirmesiyle 5 yılda ödeniyor. Anüite, %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 4120 denar olduğuna göre altıncı ödemeyi belirtelim.

Önce birinci, ondan sonra da altıncı ödemeyi belirteceğiz. $a = 4120$ denar, $n = 5$, $m = 2$, borcun amortismanı 10 yıl ve faiz katsayısı $r = 1 + \frac{6}{200} = 1{,}03$ olduğunu biliyoruz. O halde ilk ödeme: $b_1 = \frac{a}{r^n} = \frac{4120}{1{,}03^{10}} = 3065{,}67$ denar olduğunu buluyoruz. Ödemeler bir geometrik dizisi oluşturduğuna göre, geometrik dizilerin özelliği gereğince altıncı ödeme $b_6 = {}_1^5 = 3065{,}67 \cdot 1{,}03^5 =$
$= 3553{,}95$ denar olduğunu buluyoruz.◆

3. Amortismanı 6 yılda gerçekleşen %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla verilmiş bir borcun anüitesi ne kadardır? Anüiteler ve faizlendirme devreleri yıllıktır ve sadece dördüncü ödeme 8479,34 denar olduğu biliniyor.

Bilinenler: dördüncü ödeme $b_4 = 8479{,}34$, faiz katsayısı $r = 1{,}04$ ve anüite sayısı 6'dır. Anüite ve ödeme arasındaki bağıntıyı doğrudan doğruya gösteren formülden $b_4 = b_1 r^3 = \frac{a}{r^6} r^3 = \frac{a}{r^3}$ elde edilir. Örneğimizde $8479{,}34 = \frac{a}{1{,}04^3}$, denklemi elde edilir. Oradan da, anüite $a = 9538{,}9$ denar olduğunu buluyoruz.

Borç tutarı ise, $Z = a\frac{r^6 - 1}{r^6(r-1)} = 9538{,}09\frac{1{,}04^6 - 1}{1{,}04^6(1{,}04) - 1} = 60000$ denardır. ◆

Alıştırmalar

1. Bir borcun amortismanı eşit üç aylık anüitelerle ve üç aylık dönemli faizlendirmeyle yapılmaktadır. Faiz oranı %12 *p.a.(d)* ve altıncı ödeme 15000 denar olduğuna göre, onuncu ödemeyi belirtiniz.

2. Bir borcun amortismanı eşit dört aylık anüitelerle ve dört aylık dönemli faizlendirmeyle yapılmaktadır. Faiz oranı %9 *p.a.(d)* ve onuncu ödeme 16000 denar olduğuna göre, anüite tutarı ne kadardır?

3. Bir borcun amortismanı 6 yılda eşit üç aylık anüitelerle ve üç aylık dönemli faizlendirmeyle yapılıyor. Faiz oranı %18 *p.a.(d)*, üçüncü ve altıncı ödemenin toplamı 40000 denardır. Borç ne kadardır? Anüite tutarı ne kadardır?

4. Amortismanı 6 yıl süren bir borç, %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla verilmiştir. Anüiteler ve faizlendirmeler vadesi yıllık ve altıncı ve dördüncü ödeme arasındaki fark 691,9 denar olduğu bilindiğine göre anüite tutarı ne kadardır?

5. 200000 denar tutarında bir borcun amortismanı eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlendirmeyle 10 yılda gerçekleşiyor. Faiz oranı %5 *p.a.(d)* olduğuna göre, altıncı yıldaki faiz miktarını bulunuz.

(Tavsiye: beşinci ödeme dahil tüm ödemelerin toplamını hesaplayınız).

4.4. Eşit Anüiteli Borçlarda Borcun Ödenmiş Kısmının ve Kalan Kısmının Hesaplanması

Ödemeleri hesaplarken, tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olduğunu varsayıyorduk. Buna göre O_k ile işaret edeceğimiz, k devrede (periyotta) borcun ödenmiş kısmı k- cı anüite dahil, ilk k ödemenin toplamına eşittir, yani:

$O_k = bi + b_2 +^{\cdots} + b_k$,

dir. Her ödemenin değerini değiştirmekle,

$O_k = b_1 + b_1 r + ... + b_1 r^{k-1} = b_1\ (+ r + r^2 + ... + r^{k-1})$,

elde edilir. Geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı formülünden, borcun k devrede ödendiği borcun kısmı için şu formül elde edilir:

$$\boxed{O_k = b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}}.$$

Not 1. Üçüncü i / i tablosundaki değerleri almakla, borcun ödenmiş kısmı için $\boxed{O_k = b_1 \cdot \left(1 + \mathrm{III}_p^k\right)}$ formülü elde edilir.

Anlaşılacağı üzere bu formül, borcun ödenmesiyle ilgili önceden bulduğumuz formülün $k = n$ için karşılığıdır.

Bundan sonra, borcun kalan kısmı ne kadardır, sorusu sorulabilir. Sorunun cevabı açıktır. Borcun kalan kısmı aslında, borç tutarı ve ödenen kısmın farkıdır. Ödenen *k- cı* anüiteden sonra borcun kalan kısmını R_{n-k} ile işaret edelim. O halde,

$$R_{n-k}=Z-O_k=Z-b_1\frac{r^k-1}{r-1}$$

olduğunu yazabiliriz. Birinci ödemeye göre borcun formülünü değiştirirsek

$$R_{n-k}=b_1\frac{r^n-1}{r-1}-b_1\frac{r^k-1}{r-1}\text{, ya da}$$

$$\boxed{R_{n-k}=b_1\frac{r^n-r^k}{r-1}}$$

elde edilir. Borcu ve borcun kalan kısmını anüite ile ifade edersek

$$R_{n-k}=a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}-\frac{a}{r^n}\frac{r^k-1}{r-1}\text{, yani}$$

$$\boxed{R_{n-k}=a\frac{r^n-r^k}{r^n(r-1)}}\text{ elde edilir.}$$

Not 2. $\frac{r^n-r^k}{r^n(r-1)}$, ifadesini i / i tablosundan karşılık gelen değerini değiştirmekle, ödenen k anüiteden sonra borcun kalanını hesaplamak için şu formül geçerli olacaktır:

$$\boxed{R_{n-k}=a\cdot \mathrm{IV}_p^{n-k}}.$$

1. 500000 denar tutarında borcun amortismanı, %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlendirmeyle 4 yılda yapılmalıdır. Üç ödeme yapıldıktan sonra borcun kalanı ne kadardır?

Borç $Z = 500000$ denar, $n = 4$ ve anüite sayısı da 4 tür, faiz katsayısı $r = 1,04$ biliniyor. Üçüncü anüite ödendikten sonra $O_3=b_1\frac{r^3-1}{r-1}$ dir. Buna göre, önce birinci ödemeyi belirtmemiz gerekir. $b_1=\frac{a}{r^4}$, dir ve ödenen kısım

$$a=Z\frac{r^4(r-1)}{r^4-1}=500000\frac{1,04^4(1,04-1)}{1,04^4-1}=137745,02\text{ denar elde edilir.}$$

Ödenmiş kısım hesaplandıktan sonra, borcun kalan kısmı da hesaplanabilir, yani dördüncü ödeme $O_3=117745,02\cdot\frac{1,04^3-1}{1,04-1}=367552,85$ denarlar. Ödenmiş bölümün hesaplanmasından sonra borcun kalan kısmını, yani dördüncü kısmını kolayca hesaplayabiliriz,

$b_4=R_1=Z-O_3=500000-367552,85=132447,15$ denar olduğunu buluyoruz.◆

2. 30000 denar borç 8 yılda amortisman olacaktır. Faiz oranı %5 *p.a.(d)*, eşit anüiteli ve faizlendirme yarıyıllıktır. 10 anüite ödendikten sonra borcun kalanı ne kadardır?

Borç, toplam 16 anüite ile ödeniyor. Faiz katsayısı r = 1,025'tir. Önce anüiteyi ve ilk ödemeyi hesaplayalım. Anüite için:

$$a = 30000\frac{1{,}025^{16}\left(1{,}025-1\right)}{1{,}025^{16}-1} = 2297{,}97$$

denar elde edilir. Birinci ödeme için ise:

$$b_1 = \frac{a}{r^{16}} = \frac{2297{,}97}{1{,}025^{16}} = 1547{,}97$$

denar elde edilir. Şimdi borcun kalanını hesaplayabiliriz:

$$R_6 = b_1\frac{r^{16}-r^{10}}{r-1} = 1547{,}97\frac{1{,}025^{16}-1{,}025^{10}}{1{,}025-1} = 12657{,}5$$

denar elde edilir.

Hesaplanan kalandan, borcun ödenmiş kısmını da hesaplayabiliriz. Buna göre,
$O_{10} = Z - R_6$ = 30 000 – 12657,5 = 17342,5 denar artık ödenmiştir.◆

3. 100000 denar tutarında borcun amortismanı 50 yılda yapılmalıdır. Faiz oranı %4 *p.a.(d)* yıllık vadelidir. Yıllık 20 anüite ödendikten sonra kalan borç ne kadardır?

Örneği, *i / i* tablolarından yararlanarak çözelim. Borcun kalanını ve ödenmiş kısmını hesaplayacağız. Borcun kalanı için $R_{30} = a \cdot IV_4^{30}$ geçerlidir. Önce anüiteyi hesaplayalım.

Anüite, $a = Z \cdot {}_4^{50}$ = 100000 · 0,046552 = 4655,2 dir. İlk ödeme ise,
$b_1 = a \cdot II_4^{50}$ = 4655,2 · 0,140707 = 655,02 dir. Borcun kalan kısmı
$R_{30} = a \cdot IV_4^{30}$ = 4655,2 · 17,292033 = 80494,75 denardır ve sonunda
$O_{20} = b_1 \cdot (1 + \mathrm{III}_4^{20})$ = 655,02 · 29,77807857 olduğunu buluyoruz.◆

Alıştırmalar

1. Bir borcun amortismanı 40 yılda, yarıyıllık anüitelerle ve %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla yarıyıllık vadeli faizlendirmeyle yapılacaktır. Yirminci ödeme 1000 denar olduğuna göre, 30 anüite ödendikten sonra borcun kalan kısmını belirtiniz.

2. 200000 denar tutarında borcun amortismanı 25 yılda, yarıyıllık anüitelerle ve %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla yarıyıllık vadeli faizlendirmeyle yapılacaktır. 21. anüiteden 30. anüiteye kadar (30. anüite dahil) ne kadar borç ödenmiştir?
($O_{30} - O_{20}$ farkını bulunuz).

3. Bir borcun amortismanı 40 yılda, yıllık anüitelerle ve %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla yıllık vadeli faizlendirmeyle yapılacaktır. İlk 25 ödemeyle borç 40000 denar azalmıştır. Borç tutarı ne kadardır?

4. Bir borcun amortismanı 50 yılda, yarıyıllık anüitelerle ve %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla yarıyıllık vadeli faizlendirmeyle yapılacaktır. 21. anüiteden 30. anüiteye kadar (30. anüite dahil) 10000 denar borç ödendiğine göre, borç tutarı ne kadardır?

5. 1000000 denar tutarında borcun amortismanı 20 yılda, eşit yarıyıllık vadeli anüitelerle yapılacaktır. Faiz oranı %4 *p.a.(d)* yarıyıllık vadeli faizlendirme olduğuna göre 10 yıl sonra borcun ne kadar kısmı ödenecektir?

4.5. Eşit Anüiteli Borçların Amortismanında Faiz Oranı ve Devre Sayısının Hesaplanması

Borç ve anüitenin hesaplanmasına uygulanan formülden, faiz oranı ya da devre sayısı bilinmeyen olarak diğer bilinen büyüklüklerle ifade edilebilirler. Kiralarda yapıldığı gibi, formülle doğrudan doğruya hesaplamakla ya da *i / i* tablolarından yararlanmakla yapabiliriz. Bunu birkaç örnekle göstereceğiz.

Başlangıç formülü olarak, borç formülünü alalım. $Z = a\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$ formülüne gereken dönüşümleri yapmakla:

$$\frac{Z(r-1)}{a} = 1 - \frac{1}{r^n},$$

elde edilir, oradan da

$$\frac{1}{r^n} = \frac{a - Z(r-1)}{a}, \text{ ya da } r^n = \frac{a}{a - Z(r-1)}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının logaritmasını alırsak, amortisman süresi n için

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a - Z(r-1)}}$$

formülü elde edilir.

Faiz oranının hesaplanması söz konusu olunca, yöntemlerden biri, dördüncü *i / i* tablosundan $Z = a \cdot \mathrm{I}V_p^n$ borcun temel formülünden yararlanmaktır. Halbuki, formüllerden yararlanırken, uygun denklem elde edildiğinde, doğrudan doğruya da hesaplayabiliriz.

Doğrusal ara değerleme (enterpolasyon) yöntemini şimdiye dek birçok defa kullandık, şimdi de gerektiği durumda kullanabiliriz.

Ödevlerde verilen verilere bağlı olarak, yukarıdaki formülleri kullandığımız gibi, amortisman süresini ve faiz oranını hesaplamada, gerektiğinde diğer formüller de kullanılabilir.

1. 60000 tutarında bir borç, 4000 denar tutarında eşit yıllık anüitelerle, yıllık vadeli %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla ödemelerle ne kadar zamanda amortisman olacaktır (ödenecektir) ?

Borcun hesaplanması için kullanılan $Z = a\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$ formülünde verilen değerleri değiştirerek ve logaritma işlemini uygulayarak doğrudan doğruya hesaplamayı yapabiliriz. Yani $60000 = 4000\dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n(1{,}04-1)}$, değiştirmekle $\dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n} = 0{,}6$, buradan da $0{,}4 \cdot 1{,}04^n = 1$ ya da $1{,}04^n = 2{,}5$ denklemi elde edilir. Denklemin iki tarafının logaritmasını almakla $n = \dfrac{\log 2{,}5}{\log 1{,}04} = 23{,}36$ yıl elde edilir. Amortisman süresi tam sayı değildir, yani 23 anüite eşit, 24. anüite ise farklıdır. Anüite kalanı için daha sonra söz konusu olacaktır. ◆

2. Bir borç altı aylık dönemli ve altı aylık vadeli faizlenme ile itfa (amortisman) edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)*'dir. Birinci periyottaki faiz miktarı 2189,94 denar olmakla, sekizinci anüite ödendikten sonra borcun ödenen kısmı 85829,69 denardır. Buna göre, borç ne kadar zamanda itfa edilecektir?

8 anüite ödenmiştir ve borcun ödenmiş kısmı O_8 = 85829,69 denardır. Faiz katsayısı da $r = 1 + \dfrac{4}{200} = 1{,}02$ olduğuna göre, $O_8 = b_1\dfrac{r^8 - 1}{r-1} = b_1\dfrac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1} = 8{,}582969b_1$, elde edilir, oradan da $b_1 = \dfrac{85829{,}69}{8{,}582969} = 10000$ olduğunu buluyoruz.

İlk faiz miktarı bilindiğine göre, anüite tutarını da bulabiliriz. $a = b_1 + i_1 = 12189{,}94$. Anüiteyi ve birinci ödemeyi bağlayan eşitlik, amortisman periyotlarının toplam sayısı $2n$ olduğuna göre $b_1 = \dfrac{a}{r^{2n}}$, 'dir. Oradan $1{,}02^{2n} = \dfrac{a}{b_1} = 1{,}218994$ elde edilir. Bu eşitliğin iki tarafının logaritmasını almakla $2n = \dfrac{\log 1{,}218994}{\log 1{,}02} = 10$ elde edilir. Demek ki, borç 10 anüite ile, yani 5 yılda itfa edilecektir.◆

3. Bir borç üç aylık dönemli ve üç aylık vadeli faizlenme ile itfa (amortisman) edilir. Beşinci ve üçüncü ödemenin farkı 840,64 denar, üçüncü ve altıncı ödemenin toplamı ise 42889,62 olduğuna göre faiz oranını hesaplayınız.

Dönem sonu faiz katsayısını hesaplayacağız. Verilen koşullara göre şu denklemler sistemini oluşturacağız:

$$\begin{cases} b_5 - b_3 = 840{,}64 \\ b_6 + b_3 = 42889{,}62 \end{cases}.$$

Denklemleri ilk ödeme ve faiz katsayısına göre düzenlemekle verilene denk olan şu sistem elde edilir:

$$\begin{cases} b_1r^4 - b_1r^2 = 840{,}64 \\ b_1r^5 + b_1r^2 = 42889{,}62 \end{cases},$$ Burada denklemleri taraf tarafa bölmekle

$\dfrac{b_1r^2(r^2-1)}{b_1r^2(r^3+1)} = \dfrac{840{,}64}{42889{,}62} = 0{,}0196$ bağıntısı elde edilir. Son denklemi sadeleştirerek

$\dfrac{(r-1)(r+1)}{(r+1)(r^2-r+1)} = 0{,}0196$, oradan da $\dfrac{r+1}{r^2-r+1} = 0{,}0196$ denklemi elde edilir. Bu denklem r faiz katsayısına göre

$0{,}0196r^2 - 1{,}0196r + 1{,}0196 = 0$,

ikinci derece denklemdir ve çözümü $r_1 = 1{,}02$ ve $r_2 = 51$'dir. İkinci çözümün, faiz katsayısı için anlamı yoktur, birinci çözümden ise $1 + \dfrac{p}{400} = 1{,}02$, elde edilir ve oradan p = % 8 *p.a.(d)* elde edilir.◆

4. Hangi faiz oranıyla 40000 denar tutarında bir borç 10 yılda 4550 denar tutarında eşit yıllık anüitelerle itfa edilecektir?

Hem borç hem de anüite bilindiğine göre, borcun $Z = a\dfrac{r^n-1}{r^n(r-1)}$, temel formülünden ya da $Z = a \cdot IV_p^{10}$ formülünden hareket edeceğiz. Dördüncü *i / i* tablosunda $n = 10$ için $IV_p^{10} = 8{,}79120879$ değerini arıyoruz. Bu sayı $n = 10$ için tabloda değeri olmadığına göre, sayılar arasında ara değerleme yapacağız. Veriler aşağıdaki tabloda yazılıdır.

IV_p^{10}	p	IV_p^{10}	p
8,86621634	%2,25	8,86621634	%2,25
7,75206393	%2,5	8,79120879	p
0,11415241	%-0,25	0,07500755	$2{,}25 - p$

Elde edilen farklardan orantı kuruyoruz:

0,11415241:0,25 = 0,07500755: (p - 2,25), oradan da $p - 2{,}25 = 0{,}16$ ve sonunda p = %2,41 *p.a.(d)* elde edilir.

Aynı sonuca beşinci *i / i* tablosundan yararlanarak da gelebiliriz. Orada $V_p^{10} = 0{,}011375$ olduğuna göre $a = Z \cdot V_p^{10}$ formülünden yararlanıyoruz.◆

Alıştırmalar

1. Hangi yıllık faiz oranıyla 60000 denar tutarında bir borç, 5 yılda 3669,42 denar tutarında eşit üç aylık anüitelerle itfa edilecektir (ödenecektir)?

2. 200000 denar borç, 9310,04 tutarında yarıyıllık anüitelerle ve %8 *p.a.(d)* yarıyıl vadeli faiz oranıyla ne kadar zamanda itfa edilecektir?

3. 1000000 denar borç, hangi faiz oranıyla, 61776,61 denar tutarında yıllık anüitelerle 25 yılda itfa edilir?

4. Hangi yıllık faiz oranıyla 119200 denar tutarında bir borç, 13700 denar tutarında yıllık anüitelerle 11 yılda itfa edilecektir?

5. 400000 denar tutarında borç, 24462,68 denar tutarında eşit yarıyıllık anüitelerle ödenmektedir. Faiz oranı yarıyıllık vadeli %4 p.a.(d) olduğuna göre, amortisman süresini hesaplayınız.

4.6. Eşit Anüiteli Borcun Amortisman Planı

Z tutarında bir borç eşit anüitelerle ödendiği durumda, borçlu her devre sonunda aynı tutarlı taksitler ödeyecektir. Bu ödemeler iki kısımdan meydana gelmektedir. Bu kısımlardan biri borcun bir kısmının ödeme tutarı ve kalan borcun faizidir.

Devre	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	Z	$i_1 = Zp/100$	$b_1 = a - i_1$	a
2	$R_{n-1} = Z - b_1$	$i_2 = R_{n-1}p/100$	$b_2 = a - i_2$	a
...	...	...	...	...
$n-1$	$R_2 = R_3 - b_{n-2}$	$i_{n-1} = R_2 p/100$	$b_{n-1} = a - i_{n-1}$	a
n	$R_1 = R_2 - b_{n-1}$	$i_n = R_1 p/100$	$b_n = a - i_n$	a

Bu şekilde borcun ödenmesinde, her gelen devrede borcun ödeme tutarı artar, fakat kalan borcun faizi azalmaktadır. Borcun ödenmesi önceden yapılan ve amortisman planı denilen bir plan üzerinde yapılmaktadır. Daha düzenli görünüm sağlamak için bu plan, genellikle tablo biçiminde gösterilir.

Sütunların dağılımı yukarıda gösterilen tablodan farklı olabilir, fakat her tabloda bu sütunlar olmalıdır.

Örneğin, bir amortisman planının nasıl yapıldığını adım adım göstereceğiz ve sonunda tabloyu dolduracağız.

1. 100000 denar tutarında bir borç eşit yıllık anüiteli 5 yılda %4 *p.a.(d)* yıllık vadeli faiz oranıyla itfa edilecektir. Borcun ödenmesi için amortisman planı yapılsın.

Faizlenme yıllıktır, faiz katsayısı $r = 1{,}04$. Toplam 5 anüite vardır.

Anüitenin değeri $a = 100000\dfrac{1{,}04^5(1{,}04)-1}{1{,}04^5-1} = 22462{,}8$ denardır.

- birinci kalan borcun tümüdür $R_5 = Z = 100\ 000$ denardır;

- birinci faiz $i_1 = \dfrac{Zp}{100} = 100000\dfrac{4}{100} = 4000$ denardır – tüm borcun faizi;

- birinci ödeme $b_1 = a - i_1 = 22462{,}8 - 4000 = 18462{,}8$ denardır;

- ikinci kalan, ödenen bir anüite sonrası birinci yıl sonunda:

$R_2 = Z - b_1 = 100\ 000 - 18462{,}8 = 81\ 537{,}2$ denardır;

- ikinci faiz $i_2 = \dfrac{R_4 p}{100} = 81537{,}2\dfrac{4}{100} = 3261{,}5$ denardır- ikinci kalanın faizidir;

- ikinci ödeme $b_2 = a - i_2 = 22462{,}8 - 3261{,}5 = 19201{,}3$ denardır;

- üçüncü kalan $R_3 = R_4 - b_2 = 81537{,}2 - 19201{,}3 = 62335{,}9$ denardır ikinci yılın sonunda;

- üçüncü faiz $i_3 = \dfrac{R_3 p}{100} = 62335{,}9\dfrac{4}{100} = 2493{,}44$ denardır – ikinci kalanın faizidir;

- üçüncü ödeme $b_3 = a - i_3 = 22462{,}8 - 2493{,}44 = 19969{,}36$ denardır;

- ödenen üç anüiteden sonra, üçüncü yıl sonunda dördüncü kalan:

$R_4 = R_3 - b_3 = 62\ 335{,}9 - 19\ 969{,}36 = 42\ 366{,}5$ denardır;

- dördüncü faiz $i_4 = \dfrac{R_2 p}{100} = 42366{,}5\dfrac{4}{100} = 1694{,}66$ denardır – üçüncü kalanın faizi;

- dördüncü ödeme $b_4 = a - i_4 = 46{,}8 - 1694{,}66 = 0768{,}14$ denardır;

- ödenen dört anüiteden sonra, dördüncü yıl sonunda beşinci kalan:

$R_5 = R_4 - b_4 = 42\ 366{,}5 - 20768{,}14 = 21\ 598{,}4$ denardır;

- beşinci faiz $i_5 = \dfrac{R_1 p}{100} = 21598{,}4\dfrac{4}{100} = 863{,}9$ denardır- dördüncü kalanın faizi

- beşinci ödeme $b_5 = a - i_5 = 22462{,}8 - 863{,}9 = 2\,598{,}4$ denardır;

- beş anüite ödendikten sonra altıncı kalan: $R_0 = R_1 - b_5 = 21598{,}4 - 21598{,}4 = 0$ denardır. Demek ki borç ödenmiştir.

Bu şekilde hesaplanan değerleri tabloda gösterelim.

Devre	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	100000	4000	18462,8	22462,8
2	81537,2	3261,5	19201,3	22462,8
3	62335,9	2493,44	19969,36	22462,8
4	42366,5	1694,66	20768,14	22462,8
5	21598,4	863,9	21598,4	22462,8
Toplam	307838	12313,5	100000	

Amortisman planı yapıldıktan sonra, bu planın doğru olup olmadığını yoklamak gerekir:

Koşul 1. Tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olmalıdır $\sum b_j = Z$;

Koşul 2. Son ödeme tutarı, son kalana eşit olmalıdır, $b_n = R_1$;

Koşul 3. Faizler sütunundaki değerlerin toplamı ve ödemeler sütunundaki değerlerin toplamı devre sayısı ile anüitenin çarpımına eşit olmalıdır $\sum i_j + \sum b_j = na$;

Koşul 4. Anüite, her faiz ve ona karşılık gelen ödemenin toplamıdır, $a = b_j + i_j$;

Koşul 5. Faizler sütununun toplamı $\sum i_j = \frac{p}{100} \sum R_j$ dir.

Yukarıda çözülen örnekte, tüm bu koşulların sağlandığını kolay görebiliriz. Örneğin, ödemeler sütununda tüm ödemelerin toplamı 100000 denardır; bu ise borç tutarıdır. Son ödeme ve son kalan birbirine eşittir.

Ondan sonra $\sum i_j + \sum b_j = 12313{,}5 + 100000 = 112313{,}5 = 5 \cdot 22462{,}8 = 112314$. Anüite, ödeme ve karşılık gelen faizin toplamı olduğunu görüyoruz, örneğin, $1694{,}66 + 20768{,}14 = 22462{,}8$

Sonunda $12313{,}5 = 307838 \cdot \frac{4}{100} = 12313{,}52$, olduğuna göre beşinci koşul da geçerli olduğunu görüyoruz. ◆

2. Borç, üç aylık devreli anüitelerle ve üç aylık vadeli %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. İkinci devrede faiz miktarı 496,48 denar ve beşinci devredeki faiz miktarı 371,61 denar olduğuna göre, son üç devre için amortisman planını oluşturunuz.

Bu ödevde, amortisman planı sadece son üç anüite için yapılacaktır. Başlangıç için kaç anüitenin ödeneceğini de bilmiyoruz. Verilen koşulları yazalım:

$$r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02 \text{ ve } \begin{cases} i_2 = 496{,}48 \\ i_5 = 371{,}61 \end{cases}.$$

Sistemi birinci ödeme ve anüiteye göre çözeceğiz.

$$\begin{cases} i_2 = 496{,}48 \\ i_5 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b_2 = 496{,}48 \\ a - b_5 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b_1 r = 496{,}48 \\ a - b_1 r^4 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1{,}02 b_1 = 496{,}48 \\ a - 1{,}02^4 b_1 = 371{,}61 \end{cases}.$$

Denklemleri taraf tarafa çıkarırsak $(1{,}02^4 \text{ -}1{,}02)_1 = 124{,}8$, elde edilir. Oradan da $b_1 = 2000$ denar ve $a = 2536, 48$ denar elde edilir.

Şimdi, amortismanın devre sayısını belirtmek için, birinci ödemeye ait formülden yararlanacağız; $b_1 = \dfrac{a}{r^{4n}} = \dfrac{a}{1{,}02^{4n}}$.

O halde, $1{,}02^{4n} = \dfrac{2536{,}48}{2000} = 1{,}26824$, denklemi elde edilir. Bunun logaritmasını almakla $4n = \dfrac{\log 1{,}26824}{\log 1{,}02} = 12$ elde edilir. Buna göre, borç üç yıl boyunca 12 anüite ile itfa edilir.

Son üç ödemeyi formülle hesaplayabiliriz:

$b_{10} = b_1 r^9 = 2000 \cdot 1{,}02^9 = 2390{,}19$, $b_{11} = b_1 r^{10} = 2000 \cdot 1{,}02^{10} = 2437{,}99$ ve $b_{12} = b_1 r^{11} = 2000 \cdot 1{,}02^{11} = 2486{,}74$

Bunlara karşılık gelen kalanları da hesaplayalım:

$R_{12-9} = R_3 = a\dfrac{r^{12} - r^9}{r^{12}(r-1)} = 2536{,}48\dfrac{1{,}02^{12} - 1{,}02^9}{1{,}02^{12}(1{,}02-1)} = 7314{,}91$ denar, onuncu kalan $R_{12-10} = R_2 = R_3 - b_{10} = 4924{,}72$ denar elde edilir ve on birinci kalan için $R_{12-11} = R_1 = R_2 - b_{11} = 2486{,}74 = b_{12}$ olduğunu buluyoruz. Faizler ya kalanlardan ya da daha kolay $i_j = a - b_j$ özelliğinden belirtilir. Buna göre $i_{10} = a - b_{10} = 146{,}29$, $i_{11} = a - b_{11} = 98{,}49$ ve $i_{12} = a - b_{12} = 49{,}73$ olduğunu buluyoruz. Şimdi amortisman tablosunu oluşturabiliriz:

Devre	Kalan	Faiz	Ödeme
10	7314,91	146,29	2390,19
11	4924,72	98,49	2437,99
12	2486,74	49,73	2486,74

Planın tümü olmadığına göre yoklamasını yapamıyoruz.

Alıştırmalar

1. 100000 denar tutarında bir borç 6 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenmeyle itfa edilir. Yıllık faiz oranı %4 *p.a.(d)*'dir. Anüite tutarını hesaplayınız ve amortisman planını oluşturunuz.

2. 80000 denar tutarında bir borç 6 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenmeyle itfa edilir. Yıllık faiz oranı %5 *p.a.(d)*'dir. Amortisman planını oluşturunuz.

3. 100000 denar tutarında bir borç 6 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenmeyle itfa edilir. Yıllık faiz oranı %8 *p.a.(d)*'dir. Anüite tutarını hesaplayınız ve amortisman planını oluşturunuz.

4. 10000 denar tutarında bir borç 4 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenmeyle itfa edilir. Yıllık faiz oranı %10 *p.a.(d)*'dir. Anüite tutarını hesaplayınız ve amortisman planını oluşturunuz.

5. Bir borç eşit yarı yıllık anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faizlenmeyle itfa edilir. Birinci ödeme 20000 denar, son devrenin faizi 3221,02 denar ve sondan bir evvelki devrenin faizi 6149,22 denar olduğuna göre amortisman planını oluşturunuz.

4.7. Yuvarlak Tutarlı Anüiteli Borçlar

Belli bir borcu öderken, *a* anüitesi konkre tutarlı ya da borcun bir yüzdesi olarak verilebilir. Bu anüiteler genellikle tam sayıya yuvarlanıyorlar (onluk, yüzlük vb.). Bu yüzden bunlara **yuvarlak anüiteler** ve borçlara **yuvarlak anüiteli borçlar** denilir. Anüite, yukarıda sayılan şekillerden biriyle verilmediğinde ve borcun itfalı yuvarlak anüitelerle yapılma koşulları varsa, anüitenin hesaplama yüzdesini hesaplamak gerekir. Burada da dönem sonu borçlardan, amortisman devresinin sonunda ödemeler ve vade sonu faizlenmeden söz edeceğiz.

Ödevlerde genel olarak, borç tutarı, amortisman devresi ve faiz oranı veriliyor, belirtilmesi gereken ise, yuvarlak değerli anüite tutarı ve sonunda diğerlerinden farklı olan son anüite tutarını.

Borcun *Z* tutarı ve faiz oranı *%p p.a.(d)* verilmiş olsun. Amortisman devrelerinin sayısı bilindiği durumda, $n-1$ anüitenin değeri eşit ve son olan n - ci anüitenin değeri diğerlerinden küçük olduğuna göre, $100V_p^n$ ve $100V_p^{n-1}$ arasında bulunan p_1 yüzdesi aranılır. Yuvarlanan anüiteler, eşit olan anüitelerden büyüktür ve bu yüzden son anüite onlardan farklı ve değeri diğerlerinden küçüktür ve ona **anüite kalanı** denir.

Demek ki, yuvarlak anüiteyi bilmiyorsak, borcun p_1 yüzdesi gibi ifade edilecektir, genel olarak tam sayı ile ya da $\boxed{a=\frac{p_1 Z}{100}}$, formülü ile ifade edilecektir ve bu durumda:

$$\boxed{100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1}}$$

geçerli olacaktır.

1. 130 000 denar tutarında bir borç 6 yılda yuvarlak yarıyıllık anüitelerle ve %5 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlenme ile itfa edilir. Yuvarlak anüiteyi hesaplayınız.

Faiz katsayısı $r=1+\frac{5}{200}=1{,}025$, anüite sayısı 6. 2 = 12 dir. p_1 yüzdesini

$$100\frac{1{,}0025^{12}(1{,}025-1)}{1{,}025^{12}-1} < p_1 < 100\frac{1{,}025^{11}(1{,}025-1)}{1{,}025^{12}-1},$$ eşitsizliğinden belirteceğiz. Oradan:

$9{,}74\% < p_1 < 10{,}51\%$ gerekir.

p_1 için bu aralıkta bulunan ve hesaplamalar için daha kolay tam sayı olan p_1 = %10 değerini seçeceğiz.

Buna karşılık gelen yuvarlak anüite

$$a=\frac{p_1 Z}{100}=\frac{10}{100}130000=13000 \text{ denardır.}$$

Elde edilen anüite tam sayı değilse onu onluklara ya da yüzlüklere yuvarlayacağız.

2. 50000 denar tutarında borç 8 yılda üç aylık anüitelerle ve faiz oranı %8,4 *p.a.(d)* olmak üzere üç aylık faizlenme ile itfa edilir. Yuvarlak anüite tutarını hesaplayınız.

Borcun itfa edilmesi için anüite sayısı 24 tür. Faiz katsayısı $r=1+\frac{8{,}4}{100}=1{,}021$ dir. Yuvarlak anüiteyi borcun bir yüzdesi olarak sayacağız ve onu belirtmek için

$$100\frac{1{,}021^{24}(1{,}021-1)}{1{,}021^{24}-1} < p_1 < 100\frac{1{,}021^{23}(1{,}021-1)}{1{,}021^{23}-1},$$

eşitsizliğinden yararlanacağız. Bu ifadenin sadeleştirilmesiyle 13,7 < p_1 < 15,5 elde edilir. Buradan p_1 = %15 olduğunu alabiliriz. O halde yuvarlak anüite $a=\frac{15}{100}Z=\frac{15}{100}\cdot 50000=7500$ denar olduğunu buluyoruz.

Bazı durumlarda, yuvarlak anüite tutarı bilindiğine göre, amortisman devre sayısını belirtmemiz gerekebilir. Bunu eşit anüiteli borçlarda yaptığımız gibi $n = \frac{1}{\log r} \log \frac{a}{a - Z(r-1)}$, formülünden yararlanarak anüitenin bilinen değerini değiştirmekle hesaplayabiliriz. Amortisman devre sayısı n doğal sayı olmadığı durumda, elde edilen sayıdan büyük olacak ilk doğal sayı alınır.

Burada da n – *ci* anüite a_1 diğerlerinden farklıdır.

3. 200000 denar tutarında bir borç 40000 denar tutarında yuvarlak yarıyıllık anüitelerle ve %10 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlenme ile itfa edilir. Borç kaç devrede itfa edilecektir?

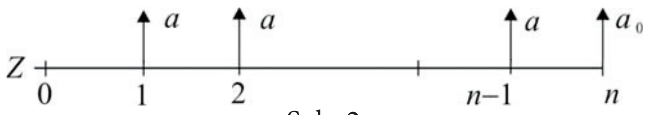
Yuvarlak anüite sabit değerle verilmiş ve borcun $\frac{40000}{200000} =$ %20'dir. Devre sonu faiz katsayısı $r = 1{,}05$ dir.

Bu durumda amortisman devrelerinin sayısı için

$n = \frac{1}{\log 1{,}05} \log \frac{40000}{40000 - 200000(1{,}05-1)} = 5{,}896$ geçerlidir. Buna göre faizin itfalı 6 devrede gerçekleşecek, öyle ki 5 anüitenin tutarı 40 000 denar, altıncısı ise farklı ve verilenden küçük olacaktır.◆

Diğerlerinden farklı olan **son anüite** ya da **anüite kalanı** denilen bu taksitin değeri ne kadardır sorusu soruluyor.

Kira kalanlarında olduğu gibi, burada da aynı şekilde hareket edilir. Anüitelerin değerleri iskontolanır ve iskontolanmış anüitelerin toplamı Z borcuna eşittir.



Şek. 2

Zaman ekseninde gösterilene göre (şek.2) borç için

$$Z = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \ldots + \frac{a_1}{r^n} = \frac{a}{r}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-2}}\right) + \frac{a_1}{r^n}.$$

yazabiliriz. Parantezler içindeki ifade ilk terimi 1 ve ortak çarpanı $\frac{1}{r}$ olan, n - 1 terimli bir geometrik dizisinin ardışık terimlerinin toplamıdır. Oradan şunu elde ediyoruz:

$$Z=\frac{a}{r}\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}}+\frac{a_1}{r^n}=\frac{a}{r}\frac{\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}}}{\frac{r-1}{r}}+\frac{a_1}{r^n}=a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}+\frac{a_1}{r^n}.$$

Son anüite için:

$$\boxed{a_1=\left[Z-a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n}.$$

elde edilir.

Not 1. $\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}$ ifadesini $IV_p^{\,n\text{-}1}$ finansal tablosundaki karşılığıyla değiştirirsek son anüite için

$$\boxed{a_1=\left[Z-a\cdot \mathrm{IV}_p^{n-1}\right]r^n=\left[Z-a\cdot \mathrm{IV}_p^{n-1}\right]\cdot \mathrm{I}_p^n}.$$

formülü geçerlidir.

Not 2. Yuvarlak anüitelerin ve ödemelerin özellikleri, aynı anüiteli borçlarda var olan özelliklerle aynıdır. Ödemeler, ilk terimi b_1 ve ortak çarpanı r faiz katsayısı olan bir geometrik dizisi oluşturuyorlar. Anüite, ödeme ve ona karşılık gelen faizin toplamıdır.

4. 10000 denar tutarında bir borç 2500 denar tutarında yıllık anüitelerle ve %4 *p.a.(d)* yıllık faizlenme ile itfa edilir. Borç kaç yılda itfa edilecektir? Anüite kalanı ne kadar olduğunu hesaplayınız.

Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1,04$, anüiteleri yuvarlak olarak alacağız. Amortisman devrelerinin sayısı için $n=\frac{1}{\log 1,04}\log\frac{2500}{2500-10000(1,04-1)}=4,445$ elde edilir. Buna göre 5 anüiteden dördü eşit 2500 denar tutarında, beşincisi ise farklıdır:

$$a_1=\left[Z-a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n=\left[10000-2500\frac{1,04^4-1}{1,04^4(1,04-1)}\right]1,04^5=1125,72 \text{ denardır.} \blacklozenge$$

Alıştırmalar

1. Bir borç üç aylık yuvarlak anüitelerle ve %40 *p.a.(d)* faiz oranıyla üç aylık vadeli faizlenmeyle 5 yılda itfa edilir. İkinci devredeki faiz miktarı 4000 denar ve beşinci ödeme 14641 olduğuna göre, borç tutarı ne kadardır?

(Tavsiye: Borcu, p_1 yuvarlak anüite ile hesaplayınız)

2. 128000 denar tutarında borç yuvarlak yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli %7 *p.a.(d)* faizlenmeyle itfa edilir. Yuvarlak anüite 12000 denar olduğuna göre, borç ne kadar zamanda ödenecektir?

3. Dört aylık yuvarlak anüitelerle, %12 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve aynı vadeli faizlenmeyle kaç devrede itfa edilecektir? Yuvarlak anüite tutarı 30000 denar, ilk ödeme ise 12000 denardır.

4. Bir borç yarıyıllık yuvarlak anüitelerle ve yarıyıllık faizlenmeyle iki yılda itfa edilir. Anüite kalanı 14317,9 denar ve son ödeme 13767,2 denar olduğuna göre, borç ne kadardır, yuvarlak anüite ne kadardır?

5. Bir borç yarıyıllık yuvarlak anüitelerle ve faiz oranı %8 *p.a.(d)* olmak üzere yarıyıllık faizlenmeyle 7 yılda itfa edilir. Anüite kalanı 249,36 olduğuna göre, borç tutarını ve yuvarlak anüiteyi belirtiniz.

4.8. Yuvarlak Anüiteli Borçların Amortisman Planı

Yuvarlak anüiteli borçların amortisman planının yapılması, eşit anüiteli borçlarda olduğu gibi yapılır, sadece son satırda, son anüitenin yazıldığı yerde farklılık vardır. Burada son ödeme diğerlerden küçüktür. Önce lazım olan büyüklükler hesaplanır ve ondan sonra amortisman tablosu doldurulur.

1. 1000000 denar tutarında borç yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli %20 *p.a.(d)* faizlenmeyle 5 yılda itfa edilir. Anüiteler yuvarlak olacak şekilde borcun ödenmesi için amortisman planını oluşturunuz.

Borç 5 anüite ile itfa edilir. Faiz katsayısı $r = 1{,}2$. Yuvarlak anüiteyi hesaplamak için, anüitenin borcun hangi kısmı olduğunu belirteceğiz. p_1 yüzdesini sağlayan

$$100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1},$$ eşitsizlikte verilerin değiştirilmesiyle:

$$100\frac{1{,}2^5(1{,}2-1)}{1{,}2^5-1} < p_1 < 100\frac{1{,}2^4(1{,}2-1)}{1{,}2^4-1},$$ ya da

$33{,}44 < p_1 < 38{,}63$ elde edilir.

Bu aralıkta bulunan herhangi bir değer alınabildiğine göre, $p_1 = \%\,35$ değerini seçeceğiz. Bu değere göre yuvarlak anüite $a = \frac{35}{100}\cdot 1000000 = 350000$ denardır. Beş anüiteden dördünün tutarı 350 000 denar, yani aynıdır, son anüite ise $a_1 = \left[1000000 - 350000\frac{1,2^4 - 1}{1,2^4(1,2-1)}\right]1,2^5 = 233760$ denardır.

Bireysel hesaplamaları ayrı ayrı yapalım:

- birinci kalan borcun tümüdür $Z = R_5 = 1000000$ denardır;
- birinci faiz $i_1 = \frac{20}{100}R_5 = 200000$ denardır – tüm borcun faizi;
- birinci ödeme $b_1 = a - i_1 = 350000 - 200000 = 150000$ denardır;
- ikinci kalan, $R_4 = R_5 - b_1 = 850000$ denardır;
- ikinci faiz $i_2 = \frac{20}{100}R_4 = 170000$ denardır- ikinci kalanın faizidir;
- ikinci ödeme $b_2 = a - i_2 = 350000 - 170000 = 180000$ denardır;
- üçüncü kalan $R_3 = R_4 - b_2 = 670000$ denardır;
- üçüncü faiz $i_3 = \frac{20}{100}R_3 = 134000$ denardır – ikinci kalanın faizidir;
- üçüncü ödeme $b_3 = a - i_3 = 350000 - 134000 = 216000$ denardır;
- dördüncü kalan: $R_2 = R_3 - b_3 = 454\,000$ denardır;
- dördüncü faiz $i_4 = \frac{20}{100}R_2 = 90800$ denardır;

-dördüncü ödeme $b_4 = a - i_4 = 350000 - 90800 = 259200$ denardır;

- beşinci kalan: $R_1 = R_2 - b_4 = 194\,800$ denardır;
- beşinci faiz $i_5 = \frac{20}{100}R_1 = 38960$ denardır.
- beşinci ödeme $b_5 = a - i_5 = 233760 - 38960 = 194800$ denardır; Bu ödeme diğerlerinden farklı olduğundan doğrudan doğruya $b_5 = Z - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 194800$ biçiminde de hesaplanabilir.

Borcun ödenmesine karşılık gelen amortisman tablosu doldurulur:

Devre	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	1000000	200000	150000	350000
2	850000	170000	180000	350000
3	670000	134000	216000	350000
4	454000	90800	259200	350000
5	194800	38960	194800	233760
Toplam	3168800	633760	1000000	

Burada da, amortisman planının yoklaması yapılmalıdır:

Koşul 1. Tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olmalıdır $\sum b_j = Z$;

Koşul 2. Son ödeme tutarı, son kalana eşit olmalıdır, $b_n = R_1$;

Koşul 3. Yuvarlanan anüite, her faiz ve ona karşılık gelen ödemenin toplamıdır, $a = b_j + i_j$; son ödeme hariç. Son anüite, anüite kalanı ve ona karşılık gelen faizin toplamıdır.◆

2. Borç, üç aylık devreli yuvarlanmış anüitelerle ve üç aylık vadeli %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Yuvarlanmış anüite tutarı 10000 denar olduğuna göre, son dört devre için amortisman planını oluşturunuz.

Birinci kalanı bulmak için borç tutarını belirtmemiz gerekir. Yuvarlak anüitelerde $a = \frac{p_1}{100} Z$, olduğuna göre p_1 yüzdesine ihtiyaç vardır. Burada $100\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1} - 1}$ eşitsizliği geçerlidir.

Bu ödevde toplam $nm = 12$ devre vardır. Faiz katsayısı $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$ dir. Oradan, $100\frac{1{,}02^{12}(1{,}02-1)}{1{,}02^{12} - 1} < p_1 < 100\frac{1{,}02^{11}(1{,}02-1)}{1{,}02^{11} - 1}$, ya da $9{,}46 < p_1 < 10{,}22$ elde edilir. $p_1 = \%\ 10$ alarak, borç tutarı $Z = \frac{100}{p_1} a = 100000$ denar olduğunu buluyoruz. Anüite kalanı $a_1 = \left[100000 - 10000\frac{1{,}02^{11} - 1}{1{,}02^{11}(1{,}02-1)}\right]1{,}02^{12} = 2703{,}28$ denardır.

Son dört ödemeyi belirtmek için, önce ilk ödemeyi belirtelim. $b_1 = a - i_1 = 10000 - \frac{8}{400} \cdot 100000 = 8000$. Ödemeler bir geometrik dizisinin ardışık terimleri olduğuna göre:

$$b_9 = b_1 r^8 = 8000 \cdot 1{,}02^8 = 9373{,}27\ ,\ b_{10} = b_1 r^9 = 8000 \cdot 1{,}02^9 = 9560{,}74\ ,$$

$b_{11} = b_1 r^{10} = 8000 \cdot 1{,}02^{10} = 9751{,}96$ elde edilir. Son ödeme dizinin terimi değildir, bu yüzden onu başka şekilde hesaplanmalıyız. Bunu belirtmek için, yöntemlerden biri $a_1 = b_{12}\, r$ formülünden yararlanarak belirtilir. Buna göre $b_{12} = \frac{a_1}{r} = 2650{,}27$ denardır. Son ödemeye kademe kademe de gelebiliriz. Ödenen sekiz anüiteden sonra, kalanı doğrudan doğruya, ilk sekiz ödemenin toplamını borçtan çıkararak belirtelim:

$$R_4 = Z - \left(b_1 + b_1 r + b_1 r^2 + \ldots + b_1 r^7\right) = Z - b_1 \frac{r^8 - 1}{r - 1}$$

$$=100000-8000\frac{1,02^8-1}{1,02-1}=31336,24 \text{ denar.}$$

Son dört devrenin amortisman planını oluşturalım.

Devre	Borç kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
9	31336,24	627,72	9373,27	10000
10	21962,7	493,54	9560,24	10000
11	12401,7	248,04	9751,96	10000
12	2650,27	53	2650,27	2703,28

Alıştırmalar

1. 60000 denar tutarında borç yuvarlak yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli olmak üzere %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Yuvarlak anüite 4000 denar tutarında olduğuna göre, borç ne kadar zamanda ödenecektir? Son anüiteyi ve son ödemeyi hesaplayınız ve ondan sonra amortisman planını oluşturunuz.

2. 20000 denar borç, faiz oranı %4 *p.a.(d)* olmak üzere, yıllık vadeli faizlenme ile dört yılda 3000 denara yuvarlanmış yarıyıllık anüitelerle itfa edilir. Borcun amortisman planını oluşturunuz.

3. 8 000 denar borç, faiz oranı yıllık %5 *p.a.(d)* olmak üzere, yıllık vadeli faizlenme, yıllık anüitelerle itfa edilir. Yıllık anüiteler borcun %35'i olduğuna göre, amortisman planını oluşturunuz ve son anüiteyi hesaplayınız.

4. 200000 denar borç, faiz oranı %4 *p.a.(d)* olmak üzere, yıllık vadeli faizlenme ile dört yılda yuvarlanmış yıllık anüitelerle itfa edilir. Borcun amortisman planını oluşturunuz.

5. Bir borç, yuvarlanmış yarıyıllık anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faizlenmeyle 3 yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)* yarıyıllıktır. Son ödeme 1265,51 denar olduğuna göre, borcun amortisman planını oluşturunuz.

4.9. Borçlarin Dönüştürülmesi

Borçların amortismanında (itfa edilişinde), amortismanın koşullarının değişmesine ihtiyaç duyulabilir. Bazı durumlarda borçlu, belli yükseklikteki borcunu ödeyemez durumda olabilir ya da borcunu süresi dolmadan ödemek isteyebilir, bazı durumlarda borç veren, borcun ödeme süresini kısaltmak ya da uzatmak isteyebilir vb. Borcun ödendiği bir süreden sonra, amortisman koşullarının değişmesine **borcun dönüştürülmesi** denir. Değişmesi istenen koşullardan en çok, faiz oranı, amortisman vadesi ve diğer koşullar olabilir.

Belli sayıda anüitenin ödenmesinden sonra, borcun dönüştürülmesi aslında, borcun kalanı temel değer sayarak yeni borç gibi algılanabilir. Şimdi, anüite sayısı, ödeme süresi, hatta faiz oranı bile farklı olabilir.

Borçların bu şekilde amortismanında bulunan büyüklüklerin değişmesiyle ilgili, örnekler vasıtasıyla şu üç durumu inceleyeceğiz:

- faiz oranı değişmeden, amortisman süresinin değiştirilmesi;
- amortisman süresi değişmeden, faiz oranının değiştirilmesi ve
- faiz oranı ve amortisman süresinin değiştirilmesi.

Bu durumlardan her birinde, önce dönüşüm süresi başlayıncaya kadar, amortisman koşullarına göre geçen süredeki anüiteler hesaplanır. Ondan sonra, yeni amortisman koşullarına uyacak borcun kalan kısmı hesaplanır ve bu miktar artık yeni borç olarak sayılır. Bu kalan için, yani yeni borç için, amortisman süresi değiştirildiği durumda, kalan süre uzatılır ya da kısaltılır. Faiz oranı değiştirilirse, kalan süre için yeni anüite tutarı hesaplanır. Hem zaman süresi hem de faiz oranı değiştirilirse, her iki değişim de göz önünde bulundurulur.

1. 200000 denar tutarında borç 20 yılda %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla, eşit yarıyıllık anüitelerle ve yarıyıllık faiz vadesiyle itfa edilmelidir. 25 anüite ödendikten sonra amortisman süresi daha 10 yıl uzatılıyor. Faiz oranı aynı kalacak şekilde, amortisman süresinin değişiminden önce ve sonraki anüite tutarını hesaplayınız.

Önce borcun ilk 25 anüitesinin tutarını hesaplayacağız.

Burada, Z = 200000 denar, anüite sayısı 40 ve faiz katsayısı $r = 1 + \frac{5}{200} = 1{,}025$ biliniyor. Borç eşit anüiteli olduğuna göre

$$a = Z\frac{r^{40}(r-1)}{r^{40}-1} = 200000 \cdot \frac{1{,}025^{40}(1{,}025-1)}{1{,}025^{40}-1} = 7967{,}24 \text{ denardır.}$$

25 anüite ödendikten sonra borcun kalanını hesaplayalım. $R_{40-25} = Z\dfrac{r^{40} - r^{25}}{r^{40} - 1} = 200000 \cdot \dfrac{1{,}025^{40} - 1{,}025^{25}}{1{,}025^{40} - 1} = 98645{,}5$ denardır. Şimdi bu miktar parayı, faiz oranı aynı fakat amortisman süresi uzatılmış yeni borç olarak sayacağız. Süre 10 yıl, yani 20 devre için uzatılmış ve kalan 15 devre ile beraber, yeni borç Z^*, 98645,5 denar tutarında 35 dönemde ve $r = 1{,}025$ faiz katsayısıyla ödenecektir. O halde yeni anüite

$$a^* = Z^*\frac{r^{35}(r-1)}{r^{35}-1} = 98645{,}5 \cdot \frac{1{,}025^{35}(1{,}025-1)}{1{,}025^{35}-1} = 4262{,}04$$ denar olacaktır. ◆

2. 500000 denar tutarında borç 25 yılda yıllık vadeli %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla, yarıyıllık vadeli eşit anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faiz hesaplanmasıyla ödenecektir. 20 anüite ödendikten sonra, faiz oranı %5 olarak değiştirilmiş, ödeme süresi ise aynı kalmıştır. Faiz oranının değiştirilmesinden önce ve sonra anüite tutarını hesaplayınız.

Önce ilk 20 anüitenin tutarını hesaplayacağız.

Anüiteler eşit tutarlıdır, $Z = 500000$ denar, ödeme süresi 25 yıl, yani 50 anüite, faiz katsayısı $r = 1{,}03$ biliniyor. O halde anüite tutarı:

$$a = Z\frac{r^{50}(r-1)}{r^{50}-1} = 500000 \cdot \frac{1{,}03^{50}(1{,}03-1)}{1{,}03^{50}-1} = 19432{,}75$$

denar olduğunu buluyoruz.

20 anüite ödendikten sonra borcun kalanı:

$$R_{50-20} = Z\frac{r^{50} - r^{20}}{r^{50}-1} = 500000 \cdot \frac{1{,}03^{50} - 1{,}03^{20}}{1{,}03^{50}-1} = 380890{,}04$$

denar olduğunu buluyoruz. Bu miktarı şimdi yeni borç olarak sayacağız ve bunun amortismanı yeni koşullara göre yapılacaktır. Demek ki, $Z^* = 380890{,}04$ denar, kalan 30 devrede ve yeni faiz oranıyla ve ona karşılık gelen $r^* = 1 + \dfrac{5}{200} = 1{,}025$ faiz katsayısıyla ödenecektir.

Buna göre yeni anüite tutarı:

$$a^* = Z^*\frac{r^{*30}(r^*-1)}{r^{*30}-1} = 380890{,}04 \cdot \frac{1{,}025^{30}(1{,}025-1)}{1{,}025^{30}-1} = 18198{,}05$$

olduğunu buluyoruz. ◆

3. 300000 denar tutarında borç 10 yılda yıllık vadeli %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla, yarıyıllık vadeli eşit anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faiz hesaplanmasıyla ödenecektir. 12 anüite ödendikten sonra, faiz oranı %5 *p.a.(d)* olarak değiştirilmiş, ödeme süresi de öngörülen 10 yıldan 15 yıla uzatılmıştır. Amortisman koşullarının değiştirilmesinden önce ve sonrası anüite tutarını hesaplayınız.

Önce eski anüiteyi hesaplayalım. Ödevin koşullarına göre $Z = 300000$, amortismanın dönem sayısı 20, faiz katsayısı da $r = 1{,}03$'tür. Buna göre anüite tutarı

$$a = Z\frac{r^{20}(r-1)}{r^{20}-1} = 300000\cdot\frac{1{,}03^{20}(1{,}03-1)}{1{,}03^{20}-1} = 20164{,}71 \text{ denardır.}$$

İkinci aşamada, borcun kalan kısmını hesaplayarak elde edilen değer yeni borç olarak sayılır. 12 anüite ödendikten sonra borcun kalanını hesaplayalım.

$$Z^* = R_{20-12} = Z\frac{r^{20}-r^{12}}{r^{20}-1} = 300000\cdot\frac{1{,}03^{20}-1{,}03^{12}}{1{,}03^{20}-1} = 141550{,}08$$

denar elde edilir. Şimdi yeni borcun amortismanı %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve $r^* = 1{,}025$ faiz katsayısıyla, toplam 18 devrede, yani 8 devre amortismanın kalan süresinden ve daha 10 devre uzatılan sürede yapılacaktır.

Yeni anüite:

$$a^* = Z^*\frac{r^{*18}(r^*-1)}{r^{*18}-1} = 3141550{,}08\cdot\frac{1{,}025^{30}(1{,}025-1)}{1{,}025^{30}-1} = 9861{,}81 \text{ denar olduğunu buluyo-}$$

ruz. ◆

4. Bir borç 15 yılda altı ay vadeli %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla, altı ay vadeli eşit anüitelerle ödenecektir. Ödenen 12 anüiteden sonra, faiz oranı %10 *p.a.(d)* olarak değiştirilmiş, ödeme süresi de üç yıl kısaltılmıştır. İkinci devrede, yani borcun değişiminden sonra faiz miktarı 2900 denar olduğuna göre borç tutarını belirtiniz.

Birinci borcun amortismanı 30 anüite ile yapıldığını ve faiz katsayısı $r = 1{,}03$ olduğunu biliyoruz. Borç ve anüite arasındaki bağıntı

$$a = Z\frac{r^{30}(r-1)}{r^{30}-1} = Z\cdot\frac{1{,}03^{30}(1{,}03-1)}{1{,}03^{30}-1} = 0{,}051Z$$

formülüyle verilmiştir. 18 anüiteden sonra borcun kalan kısmı için:

$$Z^* = R_{30-18} = Z\frac{r^{30}-r^{18}}{r^{30}-1} = Z\cdot\frac{1{,}03^{30}-1{,}03^{18}}{1{,}03^{30}-1} = 0{,}507845911Z \text{ elde edilir.}$$

Bu yeni borç, $r^* = 1{,}05$ yeni faiz katsayısıyla ve azaltılmış amortisman devre sayısıyla, yani kalan 12 devreden 6 devreye indirilmiş olarak itfa edilecektir. Yeni anüite

$$a^* = Z^*\frac{r^{*6}(r^*-1)}{r^{*6}-1} = 0{,}507845911Z\cdot\frac{1{,}05^{6}(1{,}05-1)}{1{,}05^{6}-1} = 0{,}1Z \text{ olur. Bu borcun ikinci faizini}$$

biliyoruz:

$i_2^* = a^* - b_2^* = b_1^* r^{*6} - b_1^* r^* = b_1^*(r^{*6} - r^*)$; burada b_1^* yeni borcun ilk ödemesidir. O halde $2900 = i_2^* = b_1^*(1{,}05^6 - 1{,}05) = 0{,}29b_1^*$, ve oradan $b_1^* = 10\,000$ denar olduğunu buluyoruz. İkinci ödeme $b_2^* = b_1^* r^* = 10000\cdot 1{,}05 = 10500$ denar olduğuna göre, yeni anüite $a^* = b_2^* + i_2^* =$

$= 10500 + 2900 = 13400$ denar olduğunu buluyoruz. Yeni anüite için elde edilen formüle dönersek $0,1\,Z = 13400$, oradan da $Z = 134000$ denar ve ilk anüite $a = 0,051Z = 6834$ denar olduğunu buluyoruz. ◆

Alıştırmalar

1. 40000 denar tutarında borç eşit yarıyıllık vadeli anüitelerle ve aynı vadeli faizlendirmeyle %10 *p.a.(d)* faiz oranıyla 8 yılda itfa ediliyor. Ödenen altı anüiteden sonra faiz oranı %12 *p.a.(d)* olarak yükseltiliyor. Amortisman koşullarının değiştirilmesinden önce ve sonrası anüite tutarını hesaplayınız.

2. 50000 denar tutarında borç eşit yarıyıllık vadeli anüitelerle ve aynı vadeli faizlendirmeyle %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla 12 yılda itfa ediliyor. Ödenen 15 anüiteden sonra, amortisman süresi iki yıl uzatılıyor. Eski ve yeni anüite tutarını hesaplayınız.

3. Bir borç eşit üç aylık vadeli anüitelerle ve aynı vadeli faizlendirmeyle %10 *p.a.(d)* faiz oranıyla 8 yılda itfa ediliyor. Ödenen 20 anüiteden sonra faiz oranı %8 *p.a.(d)* olarak azaltılıyor ve amortisman süresi 2 yıl uzatılıyor. Ödenen 20 anüiteden sonra borcun kalanı 23438,86 denar olduğuna göre borç miktarını belirtiniz.

4. 40000 denar tutarında borç eşit üç aylık vadeli anüitelerle ve aynı vadeli faizlendirmeyle %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla 8 yılda itfa ediliyor. Ödenen 20 anüiteden sonra faiz oranı %12 *p.a.(d)* olarak yükseltiliyor, amortisman süresi ise 2 yıl azaltılıyor. Borcun dönüştürülmesinden sonra anüite tutarını hesaplayınız.

5. Bir borç eşit altı aylık vadeli anüitelerle ve aynı vadeli faizlendirmeyle %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla 10 yılda itfa ediliyor. Ödenen 6 anüiteden sonra faiz oranı %5 *p.a.(d)* olarak azaltılıyor ve amortisman süresi 3 yıl uzatılıyor. Amortisman koşullarının değiştirilmesinden önce beşinci ödeme 11698,59 denar olduğuna göre, yeni anüiteyi hesaplayınız.

4.10. Tahvillere Ayrılmış Borçların Amortismanı

Bazı durumlarda, borç miktarı büyük olduğu zaman, kredi karşılığı için gereken parasal varlıklar sağlanamazsa, **tahvillere ayrılmış borçlara** başvurulur. Tahvil aslında, anonim şirketlerin borç para bulabilmek amacıyla itibari kıymetleri eşit ve ibareleri aynı olmak üzere çıkardıkları borç senetlerine tahvil denilmektedir, yani **tahvil**, belli bir miktar paraya karşılık gelen ve belli zamanda ödenen değerli kağıttır. Bu gibi borçlarda, birçok kredi verenden (tahvilleri satın alanlardan) kredi almak durumu vardır.

Borcun bir kısmı olan her tahvilin kendi nominal değeri vardır ve eşit değerli ya da gruplara ayrılmış farklı değerli olabilirler. Her tahvilin kendi seri numarası vardır. Tahviller için konuşulacak çok şeyler vardır, fakat burada tahvillerin incelenmesi üzerinde daha fazla durmayacağız, ancak tahviller yardımıyla borçların amortismanı nasıl yapıldığına dair daha fazla inceleme yapacağız.

Borcun amortismanı, tahvillerin nominal değerleriyle ödendiği gibi, nominal değerlerinden düşük ya da büyük değerlerle de ödenebilir. Biz burada amortismanı sadece eşit nominal değerli tahvillerle ödenecek eşit anüiteli borçları inceleyeceğiz.

Kısım kısım ödenen borçları inceleyeceğiz, nitekim ödeme birden de yapılabildiğini kaydedelim.

Diğer borçlarda olduğu gibi, burada da amortisman planını yaparken önce anüite tutarı belirtilir. Tahvillerin nominal değeri önceden bilinir, verilen devrede amortismanı yapılan tahvil sayısı tam sayıdır ve ödeme tutarı tahvil sayısı ve onların nominal değerinin çarpımına eşittir. Tam sayılı tahvillerin amortismanı söz konusu olduğundan,teorik anüite tutarı ve pratik anüite tutarı problemine rastlıyoruz. Bu problemin nasıl çözüldüğünü örnekle göstereceğiz.

Burada, eşit nominal değerli tahvillerle ve farklı nominal değerli tahvillerle yapılan amortisman planları prensip olarak aynı olduğunu hatırlatalım. Birinci örnekte tahviller eşit nominal değerlidir.

1. 30000000 denar tutarında borç eşit yıllık vadeli anüitelerle ve aynı vadeli faizlendirmeyle %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 6 yılda itfa ediliyor. Borç 30 000 tahvile ayrılmıştır ve her birinin nominal değeri 1000 denardır. Tüm faiz miktarı kuponlarla ödeniyor ve tahviller nominal değerleriyle ödeniyor.

Birinci adım, teorik anüiteyi belirtiyoruz. Bunu eşit anüiteli borçlar formülüyle belirteceğiz. 6 anüite ile ödenen Z=30000000 borcunun faiz katsayısı r = 1,05'tir. Anüite değeri:

$$a = 30000000 \cdot \frac{1{,}05^6 (1{,}05 - 1)}{1{,}05^6 - 1} = 5910524{,}04 \text{ denar olduğunu buluyoruz.}$$

Amortisman planının teknik yapılışını yıl yıl inceleyeceğiz.

İlk yıl:

Teorik anüite 5910524,04 denardır.

Birinci devre için faiz miktarı $\frac{5}{100}Z = 1500000$ denardır.

Birinci ödeme, anüite ve faizin farkı olduğuna göre 4410524,04 denardır.

Borcu, birinci ödeme kadar azaltmalıyız, fakat tahvillerle ödeme yapıldığından, tüm borç tutarı ödenemiyor. Şimdi de, en çok kaç tahville ödemeyi yapabiliriz sorusuyla karşılaşıyoruz. Tahvillerin nominal değeri 1000 denar olduğuna göre en çok,

4410524,04: 1000 = 4410

tahvil alabiliriz ve bunlarla 4410000 denar ödeme yapılacaktır ve 524,04 denar ödenmemiş kalacaktır. Bu kalan bir yıl için faizlenerek ve sırada olan ödemede anüiteye katılacaktır. Buna göre pratikteki anüite 4410000 + 1500000 = 5910000 olur ve teorik anüiteden farklıdır.

İkinci yıl:

Teorik anüite 5910524,04 denar;

kalan 524,04 denar kadar arttırılmış ve

bir yıl için kalanın faizi $\frac{5}{100}524{,}04 = 26{,}2$ denar kadar arttırılmış.

İkinci yıl sonunda anüite tutarı yukarıdaki üç miktarın toplamıdır ve 5911074,28 denardır;

borcun ödenmemiş kısmının faizi:

$\frac{5}{100}(30000000 - 4410000) = 1279500$ denardır;

ikinci yıl sonundaki ödeme 5911074,28 – 1279500 = 4631574,28 denardır. Bu tutar 4631574,28: 1000 = 4631 tahville, yani toplam değeri 4631000 denar olan tahvillerle ödenecektir ve kalan 574,28 denar fark bir yıl faizlendirilecek ve anüiteye katılacaktır.

Üçüncü yıl:

Teorik anüite 5910524,04 denardır;

kalan 574,28 denar kadar arttırılmış ve

bir yıl için kalanın faizi $\frac{5}{100}574{,}28 = 28{,}71$ denar kadar arttırılmış.

Üçüncü anüite tutarı yukarıdaki üç miktarın toplamıdır ve 5911127,03 denardır;

borcun ödenmemiş kısmının faizi:

30000000 - 4410000 - 4631000 = 20595000 denardır ve

$\frac{5}{100}20595000 = 1047950$ denardır;

Üçüncü ödeme 5911127,03 -1047950 = 4863117,03 denardır.

Bu tutar toplam 4863117,03: 1000 = 4863 tahville amortisman olacaktır, 117,03 denar kalanı ise bir yıl için faizlendirilecek ve sıradaki anüiteye katılacaktır.

Dördüncü yıl:
Teorik anüite 5910524,04 denardır;
kalan 117,03 denar kadar arttırılmış ve
bir yıl için kalanın faizi $\frac{5}{100}117{,}03 = 8{,}85$ denar kadar arttırılmış.
Dördüncü anüite tutarı yukarıdaki üç miktarın toplamıdır ve 5910709,92 denardır;
borcun ödenmemiş kısmının faizi:
30000000 - 4410000 - 4631000 - 4863000 = 15732000 denardır ve
$\frac{5}{100}15732000 = 804800$ denardır.

Dördüncü ödeme 5910709,92 – 804800 = 5105909,92 denardır ve 5105909,92: 1000 = 5105 tahville ödenecek ve kalan 909,92 denar bir yıl için faizlendirilecek ve gelecekteki anüiteye katılacaktır.

Beşinci yıl:
Teorik anüite 5910524,04 denardır;
kalan 909,92 denar kadar arttırılmış ve
bir yıl için kalanın faizi $\frac{5}{100}909{,}92 = 45{,}49$ denar kadar arttırılmış.
Beşinci anüite tutarı yukarıdaki üç miktarın toplamıdır ve 5911479,45 denardır;
borcun ödenmemiş kısmının faizi:
30000000 - 4410000 - 4631000 - 4863000 - 5105000 = 10627000 denardır ve
$\frac{5}{100}10627000 = 549550$ denar olduğunu buluyoruz.

Beşinci ödeme 5911479,45 -549550 = 5361929,45 denardır ve 5361929,45: 1000 = 5361 tahville gerçekleştirilecektir ve kalan 929,45 denar bir yıl için faizlendirilecek ve gelecekteki anüiteye katılacaktır.

Altıncı yıl:
Teorik anüite 5910524,04 denardır;
kalan 929,45 denar kadar arttırılmış ve
bir yıl için kalanın faizi $\frac{5}{100}929{,}45 = 46{,}47$ denar kadar arttırılmış.
Altıncı anüite tutarı yukarıdaki üç miktarın toplamıdır ve 5911499,99 denardır;
borcun ödenmemiş kısmının faizi:

30000000 - 4410000 - 4631000 - 4863000 - 5105000 - 5361000 = 5266000 denardır ve $\frac{5}{100}5266000 = 281500$ denar olduğunu buluyoruz.

Altıncı ödeme 5911499,99 - 281500 = 5629999,96 denardır. Yuvarlamaya kadar daha 0,04 denar olduğuna göre, ödeme için 5630000 denar kalmıştır ve bu tutar 5363000: 1000 = 5363 tahvil ile ödenecektir.

Pratik anüitelerle, amortismanlı tahvilleri kullanarak amortisman planını oluşturalım.

n	Amort.'-lanmamış tahviller	Amortismanlı tahviller	Faiz	Reel ödeme	Reel anüite
1	30000	4410	1500000	4410000	5910000
2	25590	4631	1279500	4631000	5910500
3	20959	4863	1047950	4863000	5910950
4	16096	5105	804800	5105000	5909800
5	10991	5361	549550	5361000	5910550
6	5630	5630	281500	5630000	5911500
	109266	30000	5463300	30000000	35463300

Amortisman planının yoklaması yapılmalıdır.

1 - Amortismanlı tahvillerin toplamı işlemdeki tahvillere eşit olmalıdır;

2 - Son yılda işlemde bulunan tahviller, aynı yılda amortismanlı tahvillere eşit olmalıdır;

3 - Reel ödeme sütunundaki toplam tutar, tüm borç tutarına eşit olmalıdır;

4 - Bir yıl için tahvillerin toplamından hesaplanan faiz miktarı, onların nominal değerleriyle çarpımı, faiz sütunundaki toplama eşit olmalıdır;

5 - Reel anüite sütunundaki toplam, faiz ve reel ödeme sütunlarının toplamına eşittir;

6 - Reel anüiteler toplamı, teorik anüitenin kalanın faiziyle arttırıldığı miktarın altı katıdır. ◆

Sıradaki örnekte, farklı nominal değerli tahvillerle bir borcun nasıl amortisman edildiğini göreceğiz.

2. 450000 denar tutarında borç 4 yılda %6 p.a.(d) faiz oranıyla, eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlendirmeyle itfa edilecektir. Borç, üç grup tahvillere ayrılmıştır:

nominal değeri 1000 denar olan 100 tahvil;

nominal değeri 500 denar olan 500 tahvil;

nominal değeri 100 denar olan 1000 tahvil.

Faizin tamamı ödenecek, tahviller ise nominal değerleriyle ödenecektir.

İlk olarak, teorik anüitenin belirlenmesi gerekir, bu ise eşit anüiteli borçlar formülünden hesaplanacaktır. Faiz katsayısı r = 1,06 olmak üzere 4 anüite ile ödenecek $Z = 450000$ denar borç için anüite tutarı:

$$a = 450000 \cdot \frac{1{,}06^4 \left(1{,}06 - 1\right)}{1{,}06^4 - 1} = 129866{,}17 \text{ dir.}$$

Amortisman planının teknik yapılışını yıl yıl inceleyeceğiz. Nominal değerleri aynı olan tahvillerden farkı sadece, farklı nominal değerli tahvillerin alınmasıdır. Bu durumda son dönem istisna olmak üzere, önce her tahvil grubundan kaçar tanesinin amortismanı yapılacağını belirtmemiz gerekir. Bu örnekte ödemeler sayısı dörttür. O halde birinci gruptan ortalama yılda 100: 4 = 25 tahvilin amortismanı yapılmalıdır. İkinci gruptan ortalama 500: 4 = 125 tahvilin amortismanı yapılmalıdır. Üçüncü gruptan ise tutarın tamamlanmasına kadar gereken tahvillerin amortismanı yapılacaktır. Yıllara göre plan şudur:

İlk yıl:

Teorik anüite 129866,17 denardır.

Birinci devre için faiz miktarı $\frac{6}{100} Z = 27000$ denardır.

Birinci ödeme, anüite ve faizin farkı olduğuna göre 102866,17 denardır.

Şimdi de, en çok kaç tahville ödemeyi yapabiliriz sorusuyla karşılaşıyoruz. Tahvillerin nominal değerleri farklıdır fakat her gruptan her devrede ortalama kaç tanesinin alınacağını biliyoruz. Nominal değeri 1000 denar olan tahvillerden 25 tanesini, nominal değeri 500 denar olan tahvillerden 125 tanesinin amortismanı yapılırsa 25 · 1000 + 125 · 500 = 87500 denar olduğuna göre, kalan farkı nominal değeri 100 denar olan tahvillerle tamamlanacaktır. Tamamlanması gereken fark 102866,17 - 87500 = 15366,17 denar olduğuna göre 100 denarlık 135 tahvil alınacaktır. Kalan 66,17 denarı ise bir yıl için faizlendirerek teorik anüiteye katıyoruz.

Pratik anüite tutarı 87500 + 15300 + 27000 = 129800 denardır ve teorik anüite tutarından farklaşmaktadır.

İkinci yıl:

Teorik anüite 129866,17 denar;

kalan 66,17 denar kadar arttırılmış ve

bir yıl için kalanın faizi $\frac{6}{100} 66{,}17 = 3{,}97$ denar kadar arttırılmış.

İkinci yıl sonunda anüite tutarı yukarıdaki üç miktarın toplamıdır ve 129936,31 denardır;

borcun ödenmemiş kısmının faizi:

$\frac{6}{100}\left(450000 - 102800\right) = 20832$ denardır;

İkinci yıl sonundaki ödeme 129936,31 - 20832 = 109104,31 denardır. Bu tutar, ilk iki gruptan 25 · 1000 + 125 · 500 = 87500 denar ve 109104,31 - 87500 = 21604,31 farkını 100 denarlık 216 tahville tamamlayacak ve kalan 4,31 denar bir yıl için faizlendirilerek gelecek anüiteye katılacaktır.

Üçüncü yıl:

Teorik anüite 129866,17 denardır;

kalan 4,31 denar kadar arttırılmış ve

bir yıl için kalanın faizi $\frac{6}{100}4{,}31 = 0{,}26$ denar kadar arttırılmış. Üçüncü anüite tutarı yukarıdaki üç miktarın toplamıdır ve 129870,74 denardır;

borcun ödenmemiş kısmının faizi:

450000 -102800 - 87500 - 21600 = 238100 denardır ve

$\frac{6}{100}238100 = 14286$ denardır;

Üçüncü ödeme 129870,74 -14286 = 115584,74 denardır.

Bu tutar toplam ilk iki gruptan 25 · 1000 + 125 · 500 = 87500 tahvillerle ve 115584,74 - 87500 = 28084,74 farkını üçüncü gruptan100 denarlık 280 tahville tamamlayacak ve kalan 84,74 denar bir yıl için faizlendirilerek gelecek anüiteye katılacaktır.

Dördüncü yıl:

Teorik anüite 129866,17 denardır;

kalan 84,74 denar kadar arttırılmış ve

bir yıl için kalanın faizi $\frac{6}{100}84{,}74 = 5{,}08$ denar kadar arttırılmış.

Dördüncü anüite tutarı yukarıdaki üç miktarın toplamıdır ve 129955,99 denardır;

Borcun ödenmemiş kısmının faizi:

450000 -102800 -109100 - 87500 - 28000 = 122600 denardır ve

$\frac{6}{100}122600 = 7356$ denardır.

Dördüncü ödeme 129955,99 -7356 = 122599,99 denardır ve birinci ve ikinci gruptan 25 · 1000 + 125 · 500 = 87500 tahvillerle ödenecek ve kalan 122599,99 - 87500 = 35099,99 denar farkı nominal değeri 100 denar olan tahvillerle tamamlanacaktır. 0,01 denar katmakla 351 tahvil amortisman olacaktır.

Pratik anüitelerle, amortismanı yapılmış tahvilleri koyarak amortisman planını oluşturalım.

n	1000 den. tahvil	500 den. tahvil	100 den. tahvil	Faiz	Reel faiz	Reel anüite
1	25	125	153	27000	102800	129800
2	25	125	216	20832	109100	129932
3	25	125	280	14286	115500	129786
4	25	125	351	7356	122600	129956
	100	500	1000	69474	450000	519475

Alıştırmalar

1. Nominal değeri 1000 denar olan 100000 tahville ödenecek 100000000 denar tutarında borcun amortisman planını oluşturunuz. Borç dönem sonu kısımlarla % 9 *p.a.(d)* yıllık faiz oranıyla 5 yılda ödenecektir.

2. 5000000 denar tutarında bir borç 5 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli faizlenme ile, faiz oranı %2 *p.a.(d)* olmak üzere itfa edilecektir. Borç, her birinin nominal değeri 5000 denar olan 1000 tane tahville ödeneceğine göre, amortisman planını oluşturunuz.

3. 100000000 denar tutarında bir borç 5 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli faizlenme ile, faiz oranı %4 *p.a.(d)* olmak üzere itfa edilecektir. Borç iki grup tahvillere ayrılmıştır:
- nominal değeri 10000 denar olan 600 tane tahvil;
- nominal değeri 5000 denar olan 800 tane tahvil.

Amortisman planını oluşturunuz.

4. 1200000 denar tutarında bir borç iki yılda eşit altı aylık vadeli anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile, faiz oranı %10 *p.a.(d)* olmak üzere itfa edilecektir. Borç üç grup tahvillere ayrılmıştır:
- nominal değeri 1000 denar olan 600 tane tahvil;
- nominal değeri 800 denar olan 500 tane tahvil;
- nominal değeri 200 denar olan 1000 tane tahvil.

Amortisman planını oluşturunuz.

5. 20000000 denar tutarında bir borç dört yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli faizlenme ile, faiz oranı %3 *p.a.(d)* olmak üzere itfa edilecektir. Borç, her birinin nominal değeri 10000 denar olan 2000 tane tahville ödeneceğine göre, amortisman planını oluşturunuz.

6. 40000000 denar tutarında bir borç 5 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli faizlenme ile, faiz oranı %6 *p.a.(d)* olmak üzere itfa edilecektir. Borç, iki grup tahvillere ayrılmıştır:

Nominal değeri 6000 denar olan 5000 tane tahvil ve nominal değeri 5000 denar olan 2000 tane tahvil. Amortisman planını oluşturunuz.

4.11. Konu Pekiştirme Ödevleri

1. 240000 denar tutarında borç 4 yılda, eşit yarıyıllık devreli anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faizlenmeyle itfa edilecektir. Faiz oranı % 9 *p.a.(d)* olduğuna göre, anüite tutarı ne kadardır? Hesaplanan toplam faiz miktarı ne kadardır?

2. Her biri eşit anüiteli olan iki borç alınmıştır. 160000 denar tutarında olan birinci borç 4 yılda, ikincisi ise 6 yılda itfa edilecektir. Her iki borç, yarıyıllık anüitelerle ve aynı %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla ödendiğine göre**,** ikinci borcun tutarı ne kadardır?

3. Bir borç diğer bir borçtan 100000 denar büyüktür. Birincisi 20000 denar tutarlı eşit yıllık anüitelerle 12 yılda, ikincisi ise eşit yıllık ünitelerle 10 yılda itfa edilir. Her iki borca %5 *p.a.(d)* faiz oranı uygulandığına göre, ikinci borcun anüite tutarı ne kadardır?

Not: $Z_1 = Z_2 + 100000$'dir.

4. Bir borç 9 yılda dört aylık vadeli faizlenme ile ve dört aylık devreli eşit tutarlı anüitelerle itfa edilir. Faiz oranı %12 *p.a.(d)*, beşinci ve ikinci ödemenin farkı 12000 denardır. Anüite tutarını hesaplayınız.

5. Bir borç 2 yılda aylık vadeli faizlenme ile ve aylık devreli eşit tutarlı anüitelerle itfa edilir. Faiz oranı %24 *p.a.(d)* ve son faiz miktarı 300 denardır. Anüite ve borç tutarını hesaplayınız.

6. Altı yılda yarıyıllık vadeli faizlenme ile ve yarıyıllık devreli eşit tutarlı anüitelerle, %10 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilen borcun, dördüncü ödeme tutarı 34038,22 denardır. Borç tutarını, ödeme vadesinin tam yarısında borcun kalanını ve hesaplanan toplam faiz tutarını hesaplayınız.

7. 200000 denar tutarında borç, her iki yılda bir ödenen anüitelerle ve faiz oranı %8 *p.a.(d)* olmak üzere iki yıl vadeli faizlenmeyle 26 yılda itfa ediliyor. Altıncı anüiteden on birinci anüiteye kadar borcun hangi kısmı ödenmiştir?

8. Bir borç, üç aylık dönemli eşit tutarlı anüitelerle ve faiz oranı %16 *p.a.(d)* olmak üzere üç aylık vadeli faizlenmeyle 10 yılda itfa ediliyor. Ödenen 25 anüiteden sonra borç 4000 denar azalmıştır. Borcun tutarı ne kadardır?

9. Bir borç, yarı yıllık dönemli eşit tutarlı anüitelerle ve faiz oranı %10 *p.a.(d)* olmak üzere yarıyıllık vadeli faizlenmeyle 10 yılda itfa ediliyor. On birinci anüiteden başlayarak on beşinci anüiteye kadar 10000 denar tutarında borç ödenmiştir. Borç tutarı ne kadardır? on beşinci anüiteden sonra borcun kalan kısmı ne kadardır?

10. Yarıyıllık anüitelerle ve %6 *p.a.(d)* faiz oranı olmak üzere yarıyıllık vadeli faizlenmeyle ödenen bir borcun hesaplanan yedinci faizi 130727 denardır. Borç tutarını ve ödenen yedi anüiteden sonra borcun kalan kısmını belirtiniz.

11. Bir borç, üç aylık dönemli anüitelerle ve faiz oranı %32 *p.a.(d)* olmak üzere üç aylık vadeli faizlenmeyle 12,5 yılda itfa ediliyor. Ödenen 40 anüiteden sonra borcun kalanı 20000 denar olur. Borç tutarı ne kadardır? Anüite tutarı ne kadardır?

12. Faiz oranı % 6 *p.a.(d)* olmak üzere 40000 denar tutarlı anüitelerle, 1000000 tutarında borç ne kadar zamanda itfa edilir? Anüiteler ve faizlenme yarıyıllık vadelidir.

13. Bir borç, eşit tutarlı yıllık anüitelerle ve yıllık dönemli faizlenme ile itfa edilir. Birinci ödeme 200000 denar, son yıldaki faiz miktarı 11576,25 denar ve sondan bir önceki periyotta faiz miktarı 22601,25 denar olduğuna göre, borç tutarını belirtiniz.

14. 630182 tutarında bir borç üç aylık devreli anüitelerle ve aynı devreli faizlenmeyle itfa edilir. Birinci ödeme 100000 denar ve faiz oranı %8 *p.a.(d)* olduğuna göre, borç kaç devrede ödenecektir?

15. 509776 denar tutarında borç, 3 yılda eşit aylık anüitelerle ve faizlenme ile itfa edilir. Anüite tutarı 20000 denar olduğuna göre, faiz oranı ne kadardır?

16. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme ile itfa edilir. Üçüncü ve ikinci ödemenin toplamı 20604 denar ve dördüncü ve ikinci ödemenin farkı 412 denar olduğuna göre, faiz oranı ne kadardır?

17. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme olmak üzere %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Ödenen üç anüiteden sonra kalan borç tutarı 14720,17 denar ve ödenen altı anüiteden sonra kalan borç tutarı 11164,76 denar olduğuna göre, borç tutarını hesaplayınız.

18. 300000 denar tutarında borç, eşit yarıyıllık anüitelerle ve yarıyıllık faizlenme ile 10 yılda itfa edilir. Yıllık faiz oranı %6 *p.a.(d)*'dir. Anüite tutarını ve altıncı yıl sonunda borcun kalan kısmını hesaplayınız.

19. Bir borç, eşit yarıyıllık anüitelerle ve yarıyıllık faizlenme olmak üzere %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 3 yılda itfa edilir. Birinci ödeme 77298,75 denar olduğuna göre, borcun amortisman planını oluşturunuz.

20. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme olmak üzere %12 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. İkinci ay faiz tutarı 87497,33 denar ve birinci ödeme 10000 denar olduğuna göre, ilk dört ödemenin amortisman planını oluşturunuz.

21. Bir borç, eşit üç aylık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile itfa edilir. Faiz oranı %8 *p.a.(d)*'dir. Üçüncü dönemde faiz tutarı 4556,84 denar olduğuna göre son üç döneme ait amortisman planını oluşturunuz.

22. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme olmak üzere %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Ödenen ilk anüiteden sonra borcun kalan kısmı 176652,92 denar ve ödenen iki anüiteden sonra borcun kalan kısmı 135052,91 denar olduğuna göre, borcun amortisman planını oluşturunuz.

23. Bir borç, yuvarlak üç aylık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile itfa edilir. Faiz oranı %8 *p.a.(d)*'dir. Yuvarlak anüite 18000 denar ve ilk ödeme 1000 denar olduğuna göre, borç kaç devrede itfa edilecektir?

24. Bir borç, yuvarlak yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme olmak üzere %3 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Üçüncü ödeme 10609 denar ve son anüitenin bir öncesinde borcun ödenmiş kısmı 185989 denar olduğuna göre, anüite kalanını belirtiniz.

25. Bir borç, yuvarlak üç aylık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile dört yılda itfa edilir. Faiz oranı %12 *p.a.(d)*'dir. Sondan bir önceki devrede faiz tutarı 921,17 denar olduğuna göre, anüite kalanını belirtiniz.

26. 120000 denar tutarında borç, yuvarlak yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile beş yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)*'dir. Borcun amortisman planını oluşturunuz.

27. 100000 denar tutarında borç, yuvarlak yarı yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 18 yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)*'dir. Borcun son üç yılının amortisman planını oluşturunuz.

28. 20000 denar tutarında borç, yuvarlak üç aylık 3000 denar tutarında anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile iki yılda itfa edilir. Borcun amortisman planını oluşturunuz.

29. Bir borç, yuvarlak yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile dört yılda itfa edilir. Üç yıl sonra borcun ödenen kısmı 81161,6 denar ve birinci ödeme 26000 denar olduğuna göre, borcun amortisman planını oluşturunuz.

30. Bir borç, yuvarlak yarı yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 8 yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)* ve son ödeme 4984,27 denar olduğuna göre borcun son üç yılının amortisman planını oluşturunuz.

31. 120000 denar tutarında borç 12 yılda % 9 *p.a.(d)* faiz oranıyla, eşit dört aylık anüitelerle ve aynı dört aylık faiz vadesiyle itfa edilmelidir. 16 anüite ödendikten sonra amortisman süresi daha 3 yıl uzatılmış ve faiz oranı %6 *p.a.(d)*'ye indirilmiştir. Yapılan değişimden sonra borcun ilk ödemesini belirtiniz.

32. Bir borç 24 yılda %5,2 *p.a.(d)* faiz oranıyla, eşit yarıyıllık anüitelerle ve yarıyıllık faiz vadesiyle itfa edilmelidir. 20 anüite ödendikten sonra amortisman süresi 4 yıl kısaltılıyor, faiz oranı ise %3,2 *p.a.(d)*'ye düşürülüyor. Koşullar değişmeden önce birinci ödeme tutarı 1000 denar olduğuna göre, değişimden önce ve sonraki anüite tutarını hesaplayınız.

33. Bir borç 8 yılda %12 *p.a.(d)* faiz oranıyla, eşit üç aylık anüitelerle ve üç aylık faiz vadesiyle itfa edilmelidir. 20 anüite ödendikten sonra amortisman süresi 2 yıl uzatılıyor, faiz oranı ise %10 *p.a.(d)*'ye düşürülüyor. Koşullar değiştikten sonra birinci ödeme tutarı 2 400 denar olduğuna göre, borç tutarını belirtiniz.

34. Bir borç 10 yılda %16 *p.a.(d)* faiz oranıyla, eşit üç ayılık anüitelerle ve üç aylık faiz vadesiyle itfa edilmelidir. Ödeme üç yıl yapıldıktan sonra amortisman süresi daha 2 yıl uzatılıyor, faiz oranı ise %10 *p.a.(d)*'ye düşürülüyor. Yapılan iç yıllık ödemeyle 120000 denar borç ödendiğine göre, koşuların değişiminden sonra beşinci ödemeyi belirtiniz.

35. Bir borç 1 yıl ve altı ayda %18 *p.a.(d)* faiz oranıyla, eşit aylık anüitelerle ve aylık faiz vadesiyle itfa edilmelidir. Altı ay ödeme yapıldıktan sonra amortisman süresi daha bir yıl uzatılıyor ve faiz oranı %12 *p.a.(d)*'ye düşürülüyor. Koşulların değişiminden sonra ikinci ödeme 1800 denar olduğuna göre, borç tutarını belirtiniz.

36. 500000 denar tutarında borç, altı aylık eşit anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 30 yılda itfa edilmelidir. Faiz oranı %2,8 *p.a.(d)* olduğuna göre anüite tutarı ne kadardır?

37. Altı aylık eşit anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 30 yılda itfa edilmelidir. Faiz oranı %2,8 *p.a.(d)* ve birinci ödeme 5372,22 denar olduğuna göre borç tutarı ne kadardır?

38. Bir borç 30 yılda %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla, eşit altı aylık anüitelerle ve altı aylık faiz vadesiyle itfa edilmelidir. 10 yıl geçtikten sonra amortisman süresi daha 5 yıl uzatılıyor, faiz oranı ise %4,33 *p.a.(d)*'ye düşürülüyor. Birinci anüite tutarı 129413,58 denar olduğuna göre, koşullar değiştikten sonra, borcu ve anüite tutarını hesaplayınız.

39. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 50 yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)*'dir. Ödenen 20 anüiteden sonra borcun ödenmiş kısmının tutarı 58515,66 denar olduğuna göre, anüite tutarını ve borç tutarını hesaplayınız.

40. Bir borç 30 yılda %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla, eşit altı aylık anüitelerle ve altı aylık faiz vadesiyle itfa edilmelidir. 20 anüite ödendikten sonra amortisman süresi 5 yıl uzatılıyor, faiz oranı ise %6 *p.a.(d)*'ye yükseltiliyor. Koşullar değiştikten sonra yeni anüite tutarı 31564,8 denar olduğuna göre borç tutarı ne kadardır?

41. 2400000 denar tutarında borç, altı aylık devreli yuvarlak 120000 denar anüitelerle ve aynı dönemli faiz oranıyla itfa edilir. Faiz oranı %2 *p.a.(d)* olduğuna göre borç ne kadar zamanda itfa edilecektir? Son anüite ne kadardır?

42. 20000000 denar tutarında bir borç dört yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli faizlenme ile, faiz oranı %3 *p.a.(d)* olmak üzere itfa edilecektir. Borç, her birinin nominal değeri 10000 denar olan 2000 tane tahville ödeneceğine göre, amortisman planını oluşturunuz.

43. 2000000 denar tutarında bir borç iki yılda eşit yıllık vadeli anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile, faiz oranı %4 *p.a.(d)* olmak üzere itfa edilecektir. Borç, üç grup tahvillere ayrılmıştır:

- nominal değeri 1000 denar olan 5000 tane tahvil;
- nominal değeri 5000 denar olan 1000 tane tahvil;
- nominal değeri 100 denar olan 10000 tane tahvil.

Amortisman planını oluşturunuz.

Konu Özetleri

Borç, para, mal veya para cinsinden bir değerin belirli bir vade ve koşulla geri alınmak üzere verilmesidir, yani borç veren, finansal varlıklarını borç alana geçici bir süre için hizmetine devretmesidir.

Bu bölümde, borçlunun borcunu ödeme koşulları, borç verene olan yükümlülüğü, yani finansal varlıkların devredilme koşulları, borcun süresinde faizlendirmeyi içeren, anlaşmalar söz konusu olacaktır. Borç tutarı genellikle birden verilir ve geri alınması birden değil, çok kez belli periyotlarda gerçekleştirilir. Her periyotta borcun ödendiği tutara **ödeme** denir. Belli periyotta ödemenin faiziyle beraber tutarına **anüite** denir; diğer sözlerle anüite, belirli bir zaman süreci içerisinde, eşit aralıklarla verilen veya alınan eşit ödemeler serisidir. Borcun her bireysel ödemesine gereken zaman süresine **amortisman vadesi** denir.

• Anüitelerin ödeme süresine göre, **dönem sonu anüiteli** borçlar (ödemeler serisi devrenin sonunda yapılan) ve **dönem başı anüiteli** borçlar (ödemeler devrenin başında yapılan anüiteler)

• Faizin hesaplanmasına göre borçlar, **dönem sonu faizlenen** ve **dönem başı faizlenen** biçiminde adlandırılabilir.

Şunu da belirtelim, **borcun amortismanı** denilen kademeli ödemede, önceden belirlenmiş tutarlarla, belli zaman aralıklarında, önceden belirlenmiş bir plan üzerinde, ödenmesine **amortisman planı** denir.

Tutarı Z olan bir borç alınmış ve geri ödemesi, her biri *a* tutarında *n* eşit anüite ile yapılacaktır. Faiz oranı *p* dönem sonu faizlendirme ve faiz dönemi anüitelerin ödeme dönemiyle aynı olsun. Böyle durumda borç şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{Z = a\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}},$$

r dönem sonu faiz katsayısıdır.
Borç bilindiğinde, anüiteyi hesaplamak için şu formülü kullanacağız:

$$\boxed{a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}$$

k- cı ödemeyi b_k ve *k*- cı faizi i_k ile işaret edersek birinci anüite $a = b_1 + i_1$, olur. Burada faiz, birinci dönem için *Z* tüm borç tutarına hesaplanır, yani $i_1 = \frac{Zp}{100}$ dir.

Kalan anüitelerin her birini bu şekilde inceleyerek son anüiteye $a = b_n + i_n$ varıyoruz. Burada faiz borcun kalan kısmına $Z - b_1 - b_2 - \dots - b_{n-1}$ uygulanır, yani $\boxed{i_n = \frac{(Z - b_1 - b_2 - \dots - b_{n-1})p}{100}}$ dir.

Ödemeler, ilk terimi b_1 ve ortak çarpanı *r* faiz katsayısı olan bir geometrik dizisini oluşturuyorlar. Daha da, her ödeme $\boxed{b_k = b_1 r^{k-1}}$ formülüyle hesaplanabilir.

Genel olarak, k-cı ödeme borç ile ifade edildiği durumda şu formülü kullanacağız:

$$\boxed{b_k = Z\frac{r-1}{r^n-1}r^{k-1}},$$

anüite ile ifade edildiğinde $\boxed{b_k = \frac{a}{r^{n-k+1}}}$ formülünü kullanabiliriz.

O_k ile işaret edeceğimiz, k devrede (periyotta) borcun ödenmiş kısmı k-cı anüite dahil, ilk k ödemenin toplamına eşittir, yani:

$O_k = b_1 + b_2 + ... + b_k$ yani

$$\boxed{O_k = b_1\frac{r^k-1}{r-1}} \text{ dir.}$$

Ödenen k – anüiteden sonra borcun kalan kısmını R_{n-k} ile işaret edersek, birinci ödemeye göre veya anüite ile ifade edilişi:

$$\boxed{R_{n-k} = b_1\frac{r^n-r^k}{r-1}}, \text{ ya da } \boxed{R_{n-k} = a\frac{r^n-r^k}{r^n(r-1)}} \text{ dir.}$$

Amortisman süresinin, borç ve anüite ile ifade edilişi:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a-Z(r-1)}} \text{ dir.}$$

Z tutarında bir borç eşit anüitelerle ödendiği durumda, borçlu her devre sonunda aynı tutarlı taksitler ödeyecektir. Bu ödemeler iki kısımdan meydana gelmektedir. Bu kısımlardan biri borcun bir kısmının ödeme tutarı ve kalan borcun faizidir.

Devre	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	Z	$i_1 = Zp/100$	$b_1 = a - i_1$	a
2	$R_{n-1} = Z - b_1$	$i_2 = R_{n-1}p/100$	$b_2 = a - i_2$	a
...	...	...	...	...
$n-1$	$R_2 = R_3 - b_{n-2}$	$i_{n-1} = R_2p/100$	$b_{n-1} = a - i_{n-1}$	a
n	$R_1 = R_2 - b_{n-1}$	$i_n = R_1p/100$	$b_n = a - i_n$	a

Bunu aşağıdaki tablo biçiminde göstereceğiz:

Amortisman planı yapıldıktan sonra, bu planın doğru olup olmadığını yoklamak gerekir:

Koşul 1. Tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olmalıdır $\sum b_j = Z$;

Koşul 2. Son ödeme tutarı, son kalana eşit olmalıdır, $b_n = R_6$;

Koşul 3. Faizler sütunundaki değerlerin toplamı ve ödemeler sütunundaki değerlerin toplamı devre sayısı ile anüitenin çarpımına eşit olmalıdır $\sum i_j + \sum b_j = na$;

Koşul 4. Anüite, her faiz ve ona karşılık gelen ödemenin toplamıdır, $a = b_j + i_j$;

Koşul 5. Faizler sütununun toplamı $\sum i_j = \frac{p}{100} \sum R_j$ dir.

Belli bir borcu öderken, *a* anüitesi konkre tutarlı ya da borcun bir yüzdesi olarak verilebilir. Bu anüiteler genellikle tam sayıya yuvarlanıyorlar (onluk, yüzlük vb.). Bu yüzden bunlara **yuvarlak anüiteler** ve borçlara **yuvarlak anüiteli borçlar** denilir. Anüite, yukarıda sayılan şekillerden biriyle verilmediğinde ve borcun itfalı yuvarlak anüitelerle yapılma koşulları varsa, anüitenin hesaplama yüzdesini hesaplamak gerekir. Burada da dönem sonu borçlardan, amortisman devresinin sonunda ödemeler ve vade sonu faizlenmeden söz edeceğiz.

Borcun Z tutarı ve faiz oranı $\%p$ $p.a.(d)$ verilmiş olsun. Amortisman devrelerinin sayısı bilindiği durumda, $n - 1$ anüitenin değeri eşit ve son olan n - ci anüitenin değeri diğerlerinden küçük olduğuna göre, $100V_p^n$ ve $100V_p^{n-1}$ arasında bulunan p_1 yüzdesi aranılır. Yuvarlanan anüiteler, eşit olan anüitelerden büyüktür ve bu yüzden son anüite onlardan farklı ve değeri diğerlerinden küçüktür ve ona **anüite kalanı** denir.

Demek ki, yuvarlak anüiteyi bilmiyorsak, borcun p_1 yüzdesi gibi ifade edilecektir, genel olarak tam sayı ile ya da $\boxed{a = \frac{p_1 Z}{100}}$, formülü ile ifade edilecektir ve bu durumda:

$$\boxed{100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1}}$$ geçerli olacaktır.

Diğerlerinden farklı olan **son anüite** ya da **anüite kalanı** denilen bu taksitin değeri şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{a_1 = \left[Z - a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n}.$$

Yuvarlak anüiteli borçların amortisman planının yapılması, eşit anüiteli borçlarda olduğu gibi yapılır, sadece son satırda, son anüitenin yazıldığı yerde farklılık vardır. Burada son ödeme diğerlerden küçüktür. Önce lazım olan büyüklükler hesaplanır ve ondan sonra amortisman tablosu doldurulur.

Burada da, amortisman planının yoklaması yapılmalıdır:

Koşul 1. Tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olmalıdır $\sum b_j = Z$;

Koşul 2. Son ödeme tutarı, son kalana eşit olmalıdır, $b_n = R_1$;

Koşul 3. Yuvarlanan anüite, her faiz ve ona karşılık gelen ödemenin toplamıdır, $a = b_j + i_j$; son ödeme hariç. Son anüite, anüite kalanı ve ona karşılık gelen faizin toplamıdır. ◆

Borçların amortismanında (itfa edilişinde), amortismanın koşullarının değişmesine ihtiyaç duyulabilir. Bazı durumlarda borçlu, belli yükseklikteki borcunu ödeyemez durumda olabilir ya da borcunu süresi dolmadan ödemek isteyebilir, bazı durumlarda borç veren, borcun ödeme süresini kısaltmak ya da uzatmak isteyebilir vb. Borcun ödendiği bir süreden sonra, amortisman koşullarının değişmesine **borcun dönüştürülmesi** denir. Değişmesi istenen koşullardan en çok, faiz oranı, amortisman vadesi ve diğer koşullar olabilir.

Belli sayıda anüitenin ödenmesinden sonra, borcun dönüştürülmesi aslında, borcun kalanı temel değer sayarak yeni borç gibi algılanabilir. Şimdi, anüite sayısı, ödeme sürtesi, hatta faiz oranı bile farklı olabilir.

Borçların bu şekilde amortismanında bulunan büyüklüklerin değişmesiyle ilgili, örnekler vasıtasıyla şu üç durumu inceleyeceğiz:

- faiz oranı değişmeden, amortisman süresinin değiştirilmesi;
- amortisman süresi değişmeden, faiz oranının değiştirilmesi ve
- faiz oranı ve amortisman süresinin değiştirilmesi.

Bu durumlardan her birinde, önce dönüşüm süresi başlayıncaya kadar, amortisman koşullarına göre geçen süredeki anüiteler hesaplanır. Ondan sonra, yeni amortisman koşullarına uyacak borcun kalan kısmı hesaplanır ve bu miktar artık yeni borç olarak sayılır. Bu kalan için, yani yeni borç için, amortisman süresi değiştirildiği durumda, kalan süre uzatılır ya da kısaltılır. Faiz oranı değiştirilirse, kalan süre için yeni anüite tutarı hesaplanır. Hem zaman süresi hem de faiz oranı değiştirilirse, her iki değişim de göz önünde bulundurulur.

Bazı durumlarda, borç miktarı büyük olduğu zaman, kredi karşılığı için gereken parasal varlıklar sağlanamazsa, **tahvillere ayrılmış borçlara** başvurulur. Tahvil aslında, anonim şirketlerin borç para bulabilmek amacıyla itibari kıymetleri eşit ve ibareleri aynı olmak üzere çıkardıkları borç senetlerine **tahvil** denilmektedir, yani tahvil, belli bir miktar paraya karşılık gelen ve belli zamanda ödenen değerli kağıttır. Bu gibi borçlarda, birçok kredi verenden (tahvilleri satın alanlardan) kredi almak durumu vardır.

Borcun bir kısmı olan her tahvilin kendi nominal değeri vardır ve eşit değerli ya da gruplara ayrılmış farklı değerli olabilirler. Her tahvilin kendi seri numarası vardır. Tahviller için konuşulacak çok şeyler vardır, fakat burada tahvillerin incelenmesi üzerinde daha fazla durmayacağız, ancak tahviller yardımıyla borçların amortismanı nasıl yapıldığına dair daha fazla inceleme yapacağız.

Borcun amortismanı, tahvillerin nominal değerleriyle ödendiği gibi, nominal değerlerinden düşük ya da büyük değerlerle de ödenebilir. Biz burada amortismanı sadece eşit nominal değerli tahvillerle ödenecek eşit anüiteli borçları inceleyeceğiz. Kısım kısım ödenen borçları inceleyeceğiz, nitekim ödeme birden de yapılabildiğini kaydedelim.

Diğer borçlarda olduğu gibi, burada da amortisman planını yaparken önce anüite tutarı belirtilir. Tahvillerin nominal değeri önceden bilinir, verilen devrede amortismanı yapılan tahvil sayısı tam sayıdır ve ödeme tutarı tahvil sayısı ve onların nominal değerinin çarpımına eşittir. Tam sayılı tahvillerin amortismanı söz konusu olduğundan,teorik anüite tutarı ve pratik anüite tutarı problemine rastlıyoruz. Bu problemin nasıl çözüldüğünü örnekle göstereceğiz.

Burada, eşit nominal değerli tahvillerle ve farklı nominal değerli tahvillerle yapılan amortisman planları prensip olarak aynı olduğunu hatırlatalım. Birinci örnekte tahviller eşit nominal değerlidir. Bu durumda da amortisman planı şu sıraya göre yoklaması yapılmalıdır.

1 - Amortismanlı tahvillerin toplamı işlemdeki tahvillere eşit olmalıdır;

2 - Son yılda işlemde bulunan tahviller, aynı yılda amortismanlı tahvillere eşit olmalıdır;

3 - Reel ödeme sütunundaki toplam tutar, tüm borç tutarına eşit olmalıdır;

4 - Bir yıl için tahvillerin toplamından hesaplanan faiz miktarı, onların nominal değerleriyle çarpımı, faiz sütunundaki toplama eşit olmalıdır.

5 - Reel anüite sütunundaki toplam, faiz ve reel ödeme sütunlarının toplamına eşittir;

6 - Reel anüiteler toplamı, teorik anüitenin kalanın faiziyle arttırıldığı miktarın altı katıdır. ◆

Çözümler ve Ödevlerin Cevapları

1. 1.

2. a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}$, c) 2,4,8,16,32, d) -1,2,-3,4,-5. **3.** a) $\frac{4}{17}$, b) 27, c) 81. **4.** n = 2010. **5.** n = 256. **7.** a) $a_n = 2n + 1$, b) $(-1)^{n+1}n$, c) $a_n = 2 + (-1)^n$ d) $a_n = \frac{1}{n}$, e) $a_n = \frac{8}{2^n}$.

1. 2.

3. Dizi artandır. **4.** a) b) ve c) **6.** a) $a > 1$,b) $0 < a < 1$, c) $a = 1$, d) $0 < a \leq 1$, e) $a > 0$, f) $0 < a \leq 1$.

1. 3.

1. 299. **2.** 150. **3.** -77,6. **4.** a) ve c)'deki diziler aritmetik dizilerdir. a) şıkkındaki dizinin ilk terimi 2 ve ortak farkı 6'dır, c)'deki dizide ise, ilk terim 9, ortak fark -5'tir. **5.** 8 yıl sonra 1 ocak 2008 yılı. **6.** Aritmetik dizisi. **7.** $d = 3$, $a_1 = 0$. **8.** Tasarruf yapmadan önce 14000 denarı varmış ve her yıl 2500 denar tasarruf yapmıştır.

1. 4.

1. a) 19, b) x. **2.** Aranılan terim a_{n+1} dir. **5.** $a_7 + a_{11} = a_5 + a_{20}$ *ve* $a_7 + a_{11} = a_5 + a_{13}$ oradan $a_{13} = a_{20}$ elde edilir, bu ise ancak $d = 0$ olduğu durumda mümkündür.

1. 5.

1. $n(n+1)$. **2.** 500500. **3.** a) 9399,) 5850. **4.** 3000. **5.** 50. **6.** 1840.

1.6.

1. 3. 2. a) ve d) geometik dizilerdir. a)'daki dizinin ilk terimi 2 ortak çarpanı ise -4'tür, d) şıkkındaki dizinin ilk terimi 1, ortak çarpanı 2'dir. **3.** a) 10,125, b) 96. **4.** 256 defa, **5.** Ali. **6.** a) %50,363, b) 12 yıl.

1.7.

1. a) 60, b) x. **3.** Aranılan terim $a_n + 1$. **4.** $b = 15$ ya da $b = -15$. **5.** $q = 1$

1.8.

1. a) 1640, b) 40, c) $\frac{255}{128}$, d) 340. **2.** a) 3, b) 27. **3.** $a_1 = 9$, $S_5 = 6\frac{7}{9}$. **4.** 283840,5 denar. **5.** Tavsiye: örnek 2'ye bakınız ve $q = \frac{a}{b}$ yerine $q = -\frac{a}{b}$ değiştiriniz.

1. 9.

2. Hayır. **3.** $a = 5$, $b = 8$, $c = 11$. **8.** **T**avsiye: a_k *ve* a_n terimlerinin değerlerini, aritmetik dizisinin ilk n terim toplamı formülünde değiştirerek denklemin geçerli olduğunu gösteriniz.

6. 2080 denar. **7. T**avsiye: a_k *ve* a_n terimlerinin değerlerini, geometrik dizisinin ilk *n* terim toplamı formülünde değiştirerek denklemin geçerli olduğunu gösteriniz. **8.** 1792. **9.** 20480 denar. **10.** 1.7.'deki özellikten yararlanarak $(a_1a_2...a_n)^2 = (a_1a_2...a_n)\ (a_na_{n-1}..._1) = (a_1a_n)(a_2a_{n-1})...(a_na_1) = (a_1a_n)^n$ elde edilir, oradan da $a_1a_2... = (a_1)^{/2}$ elde edilir.

2.1

1. a) 18750 denar; b) 937,5 denar c) 260,4 denar (30,360) zaman ölçüsüne göre ve 256,85 denar (*k*,365) göre. **2.** 20 yıl. **3.** %5. **4.** a) 14750 denar b) 87500 denar.
5. $K = K_1 + K_2 = 108000$ denar. **6.** a) %6 *p.s.*; b) %3 *p.q.*; c) %1 *p.m.* **7.** a) %4 *p.s.*;
b) %8 *p.a.*; c) $\frac{2}{3}$% *pm.*. **8.** %9,091 *p.a.*(*a*). **9.** %11,11 *p.a.*(*d*). **10.** %6 *p.a.(a)* = %6.38 *p.a.(d)*, buna göre ikinci faiz oranı daha karlıdır %6,5 *p.a.(d).*

2.2

1. a) Karma yöntem ile 84538 denar, sadece bileşik faiz hesabıyla 84483,43 denar, b) karma yöntemi 88124,3 denar, sadece bileşik faiz hesabıyla 88117,29 denar. **2.** 56331,55 denar. **3.** 59395,02 denar. **4.** 95600,58 denar. **5. Dönem sonu vadeli** 56059,84 denar dönem sonu faizlendirme 56400 denar dönem başı faizlendirme. **6.** 24099 denar. **7.** 17205 denar.

2.3.

1. 40642 denar. **2.** 7430 denar. **3.** a) 43178,5 denar; b) 44160 denar. c) 43133,4 denar. a) ve c) şıklarındaki tutar farkları verilerin yuvarlanmasından kaynaklanır. **4.** %6. **5.** %"3,923 ve %1,943. **6.** 16847 denar.

2.4.

1. a) K = 75972,54 denar; b) K = 74617,11 denar. **2.** a) 43291 denar; b) 42918,57 denar. **3.** 250237,95 denar. **4.** 27532,75 denar. **5.** 54743,25 denar.

2.5.

1. a) 24 yıl, 6 ay ve 28 gün; b) 23 yıl, 7 ay ve 11gün. **2.** a) 39,19 üç aylık; b) 39,36 üç aylık **3.** a) %11,6196 *p.a.(a)*; b) %11,97 *p.a.(d);* **4.** %3,925 *p.a.(d)*. **5.** %5 *p.q.(d)*, 4,7 *p.a.(a)*. **6.** 10,077 yıl. **7.** %25 *p.s.(d)*. **8.** %"8,5 *p.a.(d).* **9.** 3 yıl, 1 ay ve 18 gün.

2.6.

1. a) Her üç tasarrufçu toplam 123,6 denar eşit faiz tutarı elde etmiştir; b) Her üç tasarrufçu toplam 131,73 denar eşit faiz tutarı elde etmiştir; **2.** Karma yöntemle 211440 denar, sadece bileşik faizle 210897,5 denar. **3.** 35546,5 denar. **4.** 112120 denar. **5.** 10930 denar. **6.** 966 denar. **7.** 186760 denar borç.

8. a) 42252,7denar, faiz 7747,3 denar; b) 42254,6 denar, faiz 7745,4 denar. **9.** 27 yıl. **10.** 17,175 yıl. **11.** 21729,79 denar. **12.** 226765,67 denar. **13.**. Son teklif 164893,32. **14.** 21,65 üç aylık. **15.** %1,95. **16.** 125584 denar. **17.** 474831,14 denar. **18.** Birinci teklif daha uygundur**,** ikinci teklif daha küçüktür ve 52304,28 denardır. **19.** 18 yıl 4 ay ve 29 gün. **20.** 5209,48 denar. **21.** %6,6 *p.a. (d)*. **22.** %7,57 *p.a.(d)*. **23.** 24,6 yıl ve tutarı 10000 denardır.

3.2.

1. a) S_n = 225558 denar; b) S_n = 227207 denar. **2.** S_n = 120061 denar. **3.** a) S_n = 39083 denar; b) S_n = 40646 denar. **4.** a) 479782 denar; b) 482431denar. **5.** a) 484580 denar; b) 487304 denar. 4. ve 5. ödevlerin değerlerinin karşılaştırılmasıyla, dönem sonu yatırımları getirdikleri faiz miktarı, dönem başı yatırımların getirdikleri faizden daha büyük olduğu sonucuna varılır. En büyük son değer dönem başı yatırımların dönem başı faizlenmesiyle elde edilir.

3.3.

1. a) V = 18781 denar; b) V = 18729 denar. **2.** V = 10000 denar. **3.** V = 2866 denar. **4.** V = 4603 denar. **5.** V = 6826 denar.

3.4.

1. a) n = 6; b) n = 5. **2.** n **=** 8,527. O halde n = 9, V_0 **=** 93048 denar. **3.** n **=** 31,195. O halde n = 32, V_0 =-279 denar (demek ki, 279 denar geri verilecektir). **4.** V_0 = 118 denar. **5.** n = 18.

3.5.

1. $\frac{p}{2}$ = %4. **2.** $\frac{p}{3}$ = %3,97. **3.** a) %2,436; b) %2,674. **4.** p = %8. **5.** p = %7,55.

3.6.

4. M_n = 119041 denar. **5.** a) M_n = 15726 denar; b) M_n = 16355 denar. **6.** M_n = 637300 denar. **7.** V = 5695 denar. **8.** 68044 denar.

3.7.

1. Dönem sonu faizlenme ile 7076,5 denar, dönem başı faizlenme ile 7089,5 denar elde edilir. **2.** R = 16700 denar. **3.** R = 7575 denar. **4.** R = 5991 denar. **5.** R = 1670,5 denar.

3.8.

1. 10 kira. **2.** n = 8, 4 yıl. **3.** n = 12, R_0 = 32667 denar. **4.** n = 60, R_0 = 2160 denar. **5.** n = 35, R_0 = 28 denar.

3.9.

1. p = %16,8 p. a (d). **2.** p = %5,756 *p. a (d)*. **3.** p = %8 *p. a (d)*. **4.** %9,13 *p. a (d)*. **5.** 31136 denar.

3.10.

1. R = 3400 denar. **2.** 5220 denar. **3.** 4200 denar. **4.** 25000 denar. **5.** 203454 denar.

3.11.

1. 27403 denar. **2.** 1480 denar. **3.** 4 yatırım. **4.** %6,54. **5.** 8 yıl. **6.** M_n = 286159,2 denar. **7.** R = 2475,25 denar. **8.** n = 12, R_0 = 3253,2 denar. **9.** %5,75 *p.a(d)*.
10. 11064,3 denar. **11.** 45000 denar. **12.** 175600 denar. **13.** 50000 denar. **14.** 3 yıl önce. **15.** 1128 denar. **16.** 83972 denar. **17.** 870058 denar. **18.** 15940 denar. **19.** 202716 denar. **20.** 4850 denar.

4.2.

1. a) 96948,20 denar; b) 195825,05 denar; c) 393619,11 denar. **2.** 34651,4 denar.
3. 16650 denar. **4.** 8903,64 denar. **5.** 3057,85 denar.

4.3.

1. 16882,63 denar. **2.** Anüite 17483,63 denardır. **3.** borç 713182,32 denardır.
4. 9538,09 denar. **5.** 5606,87 denar.

4.4.

1. Kalan 156137,24 denar. **2.** Ödeme 34462,95 denar. **3.** Borç 91269,92 denar. **4.** 27058,08 denar.
5. 597738,82 denar.

4.5.

1. % 8p.a.(d). **2.** n = 25 yılda 50 anüite. **3.** %3,67 *p.a.(d)*. **4.** %4,13.
5. n = 10 yıl

4.6

1. a = 19076,19 denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	80000	4000	11761,4	15761,4
2	68238,6	3411,93	12349,47	15761,4
3	55889,13	2794,46	12966,94	15761,4
4	42922,19	2146,11	13615,29	15761,4
5	29306,9	1465,35	14296,05	15761,4
6	15010,85	750,54	15010,86	15761,4
Toplam	291367,67	14568,39	80000,01	

2. a = 15761,4 denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	80000	4000	11761,4	15761,4
2	68238,6	3411,93	12349,47	15761,4
3	55889,13	2794,46	12966,94	15761,4
4	42922,19	2146,11	13615,29	15761,4
5	29306,9	1465,35	14296,05	15761,4
6	15010,85	750,54	15010,86	15761,4
Toplam	291367,67	14568,39	80000,01	

3. a = 21631,54 denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	100000	8000	13631,54	21631,54
2	86368,46	6909,47	14722,07	21631,54
3	71646,39	5731,71	15899,83	21631,54
4	55746,53	4459,72	17712,82	21631,54
5	38574,74	3085,98	18545,56	21631,54
6	20029,18	1602,36	20029,18	21631,54
Toplam	372365,33	29789,24	100000	

4. a = 3154,71 denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	10000	100	2154,71	3154,71
2	7846,29	784,6	2370,18	3154,71
3	5475,12	547,51	2067,19	3154,71
4	2867,92	286,83	2867,92	3154,71
Toplam	26188,33	2618,33	10000	

5. Son iki faizin verilerinden sistem oluşturunuz. $r = 1,1$, $n = 6$, $a = 35431,22$, $Z = 154312,2$. elde edilir. Bu verilerle amortisman planını oluşturabilirsiniz.

4.7.

1. $Z = 142857,14$ denar. **2.** 31 yıl. **3.** 14 devre. **4.** $Z = 100000$ ve $a = 30000$.
5. $a = 10000$ denar.

4.8.

1. $a_1 = 1467,83$ denar,

Devre	Borç kalanı	Faiz	Ödeme
1	60000	2400	1600
2	58400	2336	1664
3	56736	2269,44	1730,56
4	55005,44	2200,22	1799,78
5	53205,66	2128,23	1871,77
6	51333,89	2053,36	1946,64
7	49387,25	1975,49	2024,51
8	47362,74	1894,51	2105,49
9	45257,25	1810,29	2189,71
10	43067,54	1722,70	2277,30
11	40790,24	1631,61	2368,39
12	38421,85	1536,87	2463,13
13	35958,72	1438,35	2561,65
14	33397,07	1335,88	2664,12
15	30732,95	1229,32	2770,68
16	27962,27	1118,49	2881,51
17	25080,76	1003,23	2996,77
18	22083,99	883,36	3116,64
19	18967,35	758,69	3241,31
20	17526,04	629,04	3370,96
21	12355,08	494,20	3370,96
22	8849,28	353,97	3646,03
23	5203,25	208,13	3791,87
24	1411,38	56,56	1411,38

2. Anüite 3000 denar.

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	20000	600	2400	3000
2	17600	528	2472	3000
3	15128	453,84	2546,16	3000
4	12581,84	377,46	2622,54	3000
5	9959,30	298,78	2701,22	3000
6	7258,08	217,74	2782,26	3000
7	4475,82	134,27	2865,73	3000
8	1610,09	48,30	1610,09	1658,39

3. $a = 2800$, $a_1 = 455{,}7$

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	8000	400	2400	2800
2	5600	280	2520	2800
3	3080	154	2646	2800
4	434	21,7	434	455,7
Toplam	17144	855,7	8000	

4. $a = 60000$ denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	200000	8000	52000	60000
2	148000	5920	54080	60000
3	93920	3756,8	56243,2	60000
4	37676,8	1507,07	37676,8	39183,87
Toplam	479596,8	19183,87	200000	

5. $a = 2000$ denar, $a_1 = 1290{,}82$

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	20000	400	3600	2000
2	16400	328	3672	2000
3	12728	254,56	3745,44	2000
4	8982,56	179,65	3820,35	2000
5	5162,26	103,25	3896,75	2000
6	1265,51	25,31	1265,51	1290,82

4.9.

1. a = 3688, a^* = 3869,24 denar. **2.** a = 3275, a^*= 2438,33 denar **3.** Z = 49925,19 denar. **4.** a *=172,18 denar. **5.** a *=1405,55 denar.

4.10.

n	Amortismansız tahviller	Amortismanlı tahviller	Faiz	Reel ödeme	Reel anüite
1	100000	16709	9000000	16709000	25709000
2	83291	18213	7496190	18213000	25709190
3	65078	19852	5857020	19852000	25709020
4	45226	21639	4070340	21639000	25709340
5	23587	23586	2122830	23586000	25708830

2.

n	Amortismansız tahviller	Amortismanlı tahviller	Faiz	Reel ödeme	Reel anüite
1	1000	192	100000	960000	1060000
2	808	196	80800	980000	1060800
3	612	200	61200	1000000	1061200
4	412	204	41200	1020000	1061200
5	208	208	20800	1040000	1060800
Toplam	3040	1000	304000	5000000	5304000

3.

n	10000 denarlık tahviller	5000 denarlık tahviller	Faiz	Reel ödeme	Reel anüite
1	120	129	400000	1845000	2245000
2	120	144	326200	1920000	2246200
3	120	159	249400	1995000	2244400
4	120	175	169600	2075000	2244600
5	120	193	86600	2165000	2251600
Toplam	600	800	1231800	10000000	11231800

4.

n	1000 denarlık tahviller	800 denarlık tahviller	200 denarlık tahviller	Faiz	Reel ödeme	Reel anüite
1	150	125	142	60000	278400	338400
2	150	125	211	46123	292200	338323
3	150	125	285	31470	307000	338470
4	150	125	362	16120	322400	338520
Toplam	600	500	1000	153713	1200000	1353713

5. a = 5380000 denar. **6.** a = 9492000 denar.

4.11.

1. Anüite 36386,32 denar, toplam faiz tutarı 51090,56 denar. **2.** 230982,04 denar. **3.** 10006,18 denar. **4.** 266467 denar. **5.** 15300 denar. **6.** Borç 468019 denar, 200000 denar ödenmiş, borcun kalanı 268015 denar, faiz 165634 denardır. **7.** 45856,62 denar. **8.** 9126992 denar. **9.** Borç 36739,58 denar, kalan borç 12763,67 denar. **10.** 13140881 denar. **11.** 1877255 denar. **12.** 46 anüite eşit ve 47. farklı. **13.** 862025 denar. **14.** 6. **15.** %2. **16.** %2. **17.** 17705,37 denar. **18.** a = 20164,71 denar, O_{12} = 158449,71 denar ve R_8 = 141550,29 denar.

19. a = 92298,75 denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	500000	15000	77298,75	92298,75
2	422701,25	12681,04	79617,71	92298,75
3	343087,54	10292,51	82006,24	92298,75
4	261077,3	7832,32	84466,43	92298,75
5	176610,87	5298,33	87000,42	92298,75
6	89610,45	2681,31	89614,45	92298,75
Toplam	1793083,41	53792,51	500000	

20. a = 55415,31 denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	1000000	10000	45415,31	55415,31
2	954584,69	9545,85	45869,6	55415,31
3	908715,23	9087,15	46328,16	55415,31
4	862387,07	8623,87	46791,44	55415,31

21. a = 25364,84 denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
10	73149,23	1462,99	23901,85	25364,84
11	49247,38	984,95	24379,89	25364,84
12	24867,49	497,35	24867,49	25364,84

22. R_n, ve R_{n-1} kalanlarıyla sistem oluşturunuz. Oradan n = 5, a = 48666,12 denar ve borç Z = 216653 denar. **23.** 14 devre, yani 3,5 yıl. **24.** a = 16000 denar ve borç Z= 200000 denar. **25.** a =16000 denar, borç Z = 200000 denar, son anüite a_1 = 14432 denar.

26. a = 30000 denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	120000	4800	25200	30000
2	94800	3792	26208	30000
3	68592	2743,68	27256,32	30000
4	41335,68	1653,43	28346,57	30000
5	12899,11	515,96	12899,11	13415,07

27. p_1 = 4%, a = 4000, i_1 = 3000, b_1 = 3750, a_1 = 5987,27. **28.** p_1 = 15%, p = 4%, a = 2728,79, b = 2200, i_1 = 800. **29.** p = 4%,$_1$ = 30%,a = 30000, Z = 100000. **30.** $_1$ = 7,5%, a = 7500, i_1 = 2000, b_1 = 5500. **31.** b^* = 709,2. **32.** a^* = 3975,95. **33.** Z = 150852,7. **34.** b_5^* = 12307,76. **35.** Z = 5339,24. **36.** a = 12372,22. **37.** Z = 500000. **38.** Z = 4000000, a^* = 107052. **39.** Z = 300000, a = 13965,06. **40.** Z = 1000000. **41.** $2n$ = 23, a = 51235,02.

Yararlanılan kaynaklar

1. A. Damodaran, Investment Valuation 2nd Edition University with Investment Set

2. A. Glen, Essentials of Corporate Financial Management, Harlow, UK, 2007

3. D. C. M. Dickson, M. R. Hardy, H. R. Waters, Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks (International Series on Actuarial Science), Cambridge University Press, 2009

4. D.Watson, A. Head, Corporate Finance Principles and Practice, Harlow, UK, 2007

5. Gitman, Principles of Managerial Finance, Addison - Wesley, 2007

6. G. Atrill, Financial Management for Decision Makers, Harlow, UK, 2007

7. J. Berk, P. De Marzo, Corporate Finance, Harlow, UK, 2009

8. J. F. Fabozzi, F. Moodigliani, M. G. Ferri, Foundation of financial markets and institutions, 2nd ed., 2000

9. Mishkin, Eakins, Financial Markets and Institutions, Pearson, 2007

10. S. G. Kellison, The theory of interest, Georgia State University, Irwin, 1991

11. T.Bradley, P. Patton, Essential Mathematics for Economics and Business, John Wiley & Sons, 2nd Edition, 2002

12. Б. Попов, Математика за IV клас за стручните училишта, Просветно дело, Скопје, 1977

13. В. Враниќ, Основи финансијске и актуарске математике, Загреб 1964

14. Г. Тренчевски, Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2001

15. Д. Јанев, З. Коловски, Г. Билбиловска, М. Стојановски, Математика за економисти, збирка задачи, Савремена администрација, Београд, 1991

16. Е. Стипаниќ, Математика за III и IV разред гимназије друштвено - језичног смера, Завод за издавање уџбеника Народне Републике Србије, Београд, 1962

17. З. Ивановски, А. Станковска, Девизна политика, Европски универзи-тет, 2007

18. К. Тренчевски, Б. Крстеска, Г. Тренчевски, С. Здравеска, Математичка анализа за четврта година на реформираното гимназиско образование, Просветно дело, 2003

19. К. Сориќ, Збирка задатака из математике с примјеном у економији, Елемент, Загреб, 2005

20. М. Ивовиќ, Финансијска математика, Економски факултет, Београд, 2003

21. Н. Давидовиќ, Основи на математиката за економисти, Култура, Скопје, 1975

22. Р. Раљевиќ, Финансијска и актуарска математика, Савремена администрација, Београд, 1975

Yazarlar

KostadinTrençevski
Aneta Gatsovska
Naditsa İvanovska
Yovanka Trençeva Smileska

Redaksiyon:
Dr. Aktan Ago

Düzelti:
Bedri Nuredin

Türkçeye Çeviren
Abdülgani Ali

Bilgisayar İşlemleri
Yazarlar